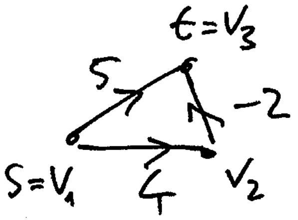
Satz 6: (Geometrische Modellierung kürzester Wege mit linearen Ungleichungen)

Sei $D=(V,A)$ ein gerichteter Graph mit Kantenlängenfunktion $\ell: A \to \mathbb{R}$. Falls D,ℓ keine Kreise negativer Länge hat und $\operatorname{dist}(s,v)<\infty$ für alle $v\in V$ gilt, dann gilt folgende Min-Max-Charakterisierung von $\operatorname{dist}(s,t)$:

$$\operatorname{dist}(s,t) = \min_{P \text{ s-t-Weg}} \ell(P)$$

$$= \max_{\substack{p: V\to\mathbb{R} \\ p(v)-p(u)\le \ell(a) \ \forall a=(u,v)\in A}} p(t)-p(s)$$

Bsp 7:



$$\operatorname{dist}(v_1,v_3) = \max \; p(v_3)-p(v_1)$$
$$p(v_1),p(v_2),p(v_3)\in\mathbb{R}$$
$$p(v_2)-p(v_1)\le 4$$
$$p(v_3)-p(v_2)\le -2$$
$$p(v_3)-p(v_1)\le 5$$

$$= \max \; (-1,0,1)\,p$$
$$p\in\mathbb{R}^3$$
$$\left.\begin{array}{l}(-1,1,0)\cdot p \le 4 \\ (0,-1,1)\cdot p \le -2 \\ (-1,0,1)\cdot p \le 5\end{array}\right\}$$ Lösungsmenge geometrisch interpretieren $\to$ Teil R

Bemerkungen:

a) $p = (0, 4, 1)$ beweist, dass es keinen s-t-Weg der Länge < 1 gibt.

b) Satz 6 gibt eine Antwort auf die einleitende Frage:
Ein Zertifikat dafür, dass P ein kürzester s-t-Weg ist, ist ein Potential $p: V \to \mathbb{R}$ mit $\ell(P) = p(t) - p(s)$.

c) Das Zertifikat zu prüfen ist viel kürzer, als alle Wege aufzuzählen:
- prüfe, ob Potential: $|A|$ Ungleichungen testen
- prüfe, ob $\ell(P) = p(t) - p(s)$: Eine Gleichung

$(|A| \leq |V|^2)$

$\longrightarrow$ effizientes Zertifikat.

Beweis (Satz 6):

max $\leq$ min: Sei $P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_m, v_m)$, $s = v_0$, $t = v_m$ eine s-t-Kantenfolge, und sei $p: V \to \mathbb{R}$ Potential. Dann gilt

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \big(p(v_i) - p(v_{i-1})\big) = p(t) - p(s).$$

D.h. die Länge jedes s-t-Wegs ist mindestens so groß wie $p(t) - p(s)$.

max ≥ min: Definiere ein Potential $p(v) = dist(s,v)$.
Dann ist $p(t) - p(s) = dist(s,t)$ (weil $dist(s,s) = 0$) und das Maximum ist höchstens größer.
Bleibt zu zeigen: p ist Potential.
Dies geht genauso wie im Beweis von Satz 5, "⇐". $\square$

Bemerkung: Ein optimales Potential ist niemals eindeutig: Falls p optimal ist, so auch $p + C$, mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

§3 Berechnung kürzester Wege

Algorithmus von Bellman (1958) und Ford (1956)

Eingabe
- $D = (V, A)$ gerichteter Graph mit $|V| = n$.
- $s \in V$ Startknoten
- $\ell : A \to \mathbb{R}$ Kantenlängenfunktion

Ausgabe
- $d_0, d_1, \dots, d_n : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- $g : V \to V$

Algorithmus in Pseudocode (Einrücken für Schleifen wie in „python".)

$d_0(s) = 0,$

$d_0(v) = \infty \quad \forall v \in V \setminus \{s\}$

for $K = 0$ to $n-1$:

  $d_{K+1}(v) = d_K(v) \ \forall v \in V$

  for $(u,v) \in A$:

    if $d_{K+1}(v) > d_K(u) + \ell((u,v))$:

      $d_{K+1}(v) = d_K(u) + \ell((u,v))$

      $g(v) = u$

if $d_n \neq d_{n-1}$:

  output "Es ex. ein Kreis neg. Länge, der von s erreichbar ist."

<u>Satz 1:</u> Es gilt:

$$d_K(v) = \min \left\{ \ell(P) : P \text{ ist } s\text{-}v\text{-Kantenfolge mit höchstens } K \text{ Kanten} \right\}$$

für $0 \leq K \leq n-1$.

<u>Beweis:</u> Induktion über K (sehr leicht).

<u>Satz 2:</u> Nach Ablauf des Algorithmus gilt $d_n = d_{n-1}$ genau dann, wenn alle von s aus erreichbaren gerichteten Kreise nicht-neg. Länge haben.

<u>Beweis</u>: → Aufgabe

<u>Bemerkung 3</u>: a) Laufzeit: Größenordnung von
$|V| \cdot |A| \le |V|^3$

b) Falls D keine gerichteten Kreise negativer Länge hat, die von s aus erreichbar sind, dann ist

$$d_{n-1}(v) = \mathrm{dist}(s,v) \qquad \text{(siehe auch Satz 2.6)}$$

und
$v, g(v), g(g(v)), \dots, s$ sind die Knoten eines kürzesten s-v-Wegs, in umgekehrter Reihenfolge.

<u>Frage</u>: Wozu negative Kantenlängen?