Beweis: → Aufgabe

Bemerkung 3: a) Laufzeit: Größenordnung von
$|V| \cdot |A| \leq |V|^3$

b) Falls D keine gerichteten Kreise negativer Länge hat, die von s aus erreichbar sind, dann ist

$$d_{n-1}(v) = \mathrm{dist}(s,v) \qquad \text{(siehe auch Satz 2.6)}$$

und

$$v,\ g(v),\ g(g(v)), \ldots, s$$ sind die Knoten eines kürzesten s-v-Wegs, in umgekehrter Reihenfolge.

Frage: Wozu negative Kantenlängen?
Antwort: Manchmal hilfreich bei der Modellierung, z.B. um einen längsten s-t-Weg zu finden

Bsp 4: (Rucksackproblem)
Gegeben ist ein Rucksack von 8 l Volumen, und 5 Gegenstände mit verschiedenem Nutzen und Gewicht:

Gegenstand i	Volumen a_i	Nutzen c_i
1	3	7
2	2	3
3	2	5
4	1	4
5	5	4

Aufgabe: Finde Auswahl von $1, 2, \ldots, 5$, so dass die Gegenstände in den Rucksack passen und ihr Nutzen maximiert wird:

$$\max \left\{ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 : \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_5 \in \{0,1\}, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 8 \end{array} \right\}$$

Formulierung als Kürzeste-Wege-Problem:

Definiere $D = (V, A)$ und $l : A \to \mathbb{R}$ wie folgt:

Knoten: $(i, x) \in V$ mit $i = 0, \ldots, 6$, $x = 0, \ldots, 8$

Kanten: $((i-1, x), (i, x)) \in A$ mit Länge 0

$\longrightarrow$ Gegenstand i nicht in den Rucksack

$((i-1, x), (i, x + a_i)) \in A$ mit Länge $-c_i$

$\longrightarrow$ Gegenstand i in den Rucksack

$((5, x), (6, 8)) \in A$ mit Länge 0

$\longrightarrow$ Endknoten

Dann gibt ein kürzester $(0,0)-(6,8)$-Weg eine optimale Auswahl wider.

<u>Bsp 5:</u> (Geldwechsel)

Die Wechsel-Raten zwischen Währungen sind nicht immer konsistent, darum kann es sinnvoll sein, nicht direkt zu wechseln, sondern mehrere Wechsel zu machen.

Währungen: $\{1, \dots, n\} = V$

Wechselkurse: $w(i,j) \rightarrow$ Für $1\,i$ bekommen wir $w(i,j) \cdot j$

<u>D.h.:</u> Tauschen wir i erst in j und dann in k, erhalten wir für $1\,i$ dann $w(i,j) \cdot w(j,k) \cdot k$

<u>Formulierung mit kürzesten Wegen:</u>

Betrachte den Logarithmus der Wechselkurse, um aus den Produkten Summen zu machen.

$$\ell((i,j)) := -\ln(w(i,j))$$

Negativer Logarithmus, da wir den größten Ertrag suchen

<u>Bemerkung:</u> Hier kommen positive und negative Vorzeichen vor, abhängig davon, ob der Wechselkurs größer oder kleiner als 1 ist.

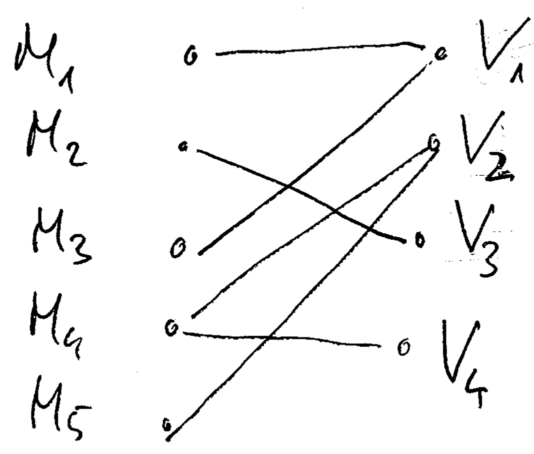
Kapitel II Matchings in bipartiten Graphen

<u>Studienplanung</u>: m Module $M_1, \dots, M_m$
k Vorlesungen $V_1, \dots, V_k$

Für jedes Paar (M_i, V_j) ist bekannt, ob V_j verwendet werden kann, um M_i zu erfüllen
(Jedes Modul ist mit einer Vorlesung erfüllt, jede Vorlesung kann höchstens ein Modul erfüllen)

<u>Ziel</u>: Erfülle möglichst viele Module.

Modellierung im ungerichteten bipartiten Graphen:



$\{M_1, V_1\}$
$\{M_2, V_3\}$
$\{M_4, V_4\}$
$\{M_5, V_2\}$
ist ein maximales Matching

§1 Grundbegriffe

<u>Def. 1</u>: Ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ ist ein geordnetes Paar, bestehend aus einer endlichen Menge V (<u>Knoten</u>) und einer Menge $E \subseteq \{\{v, w\} \subseteq V : v \neq w\}$ (unger. <u>Kanten</u>)

$\to$ G beschreibt eine symmetrische irreflexive Relation auf $V \times V$.

Definiere Kantenfolge, Weg, Kreis wie bei gerichteten Graphen.

Def. 2: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knoten $v, w \in V$.

a) v und w heißen benachbart (adjazent), falls $\{v, w\} \in E$. v heißt dann Nachbar von w, und umgekehrt.

b) v und w sind wegzusammenhängend, falls es einen v-w-Weg gibt.

c) Die Relation "wegzusammenhängend" ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen heißen Zusammenhangskomponenten.

d) Falls G nur eine Zusammenhangskomponente hat, so heißt G zusammenhängend.

Def. 3: Ein Graph $G=(V,E)$ heißt <u>bipartit</u>, falls es Teilmengen $U, W \subseteq V$ gibt, so dass

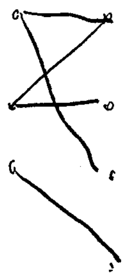
1) $V = U \dot{\cup} W$ (d.h. $V = U \cup W$ und $U \cap W = \emptyset$)

und

2) $\forall e \in E: |e \cap U| = |e \cap W| = 1$

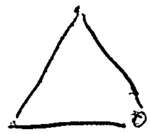
gilt.

Bsp. 4:



bipartit

U W



nicht bipartit

§2 Berechnung von Matchings mit maximaler Kardinalität.

Def. 1: Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph

a) Ein <u>Matching</u> in G ist eine Menge disjunkter Kanten, d.h.

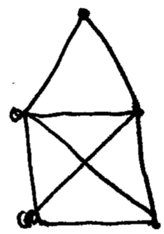
$$M \subseteq E \text{ Matching} \Leftrightarrow \forall e, f \in M, e \neq f: e \cap f = \emptyset$$

b) Die <u>Matchingzahl</u> von G ist

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}.$$

c) Ein Matching heißt <u>perfekt</u>, falls $2|M| = |V|$.

<u>Bsp 2:</u>

G 

$\nu(G) = 2$

G besitzt kein perfektes Matching

<u>Notation:</u> Da ein Weg eindeutig durch die enthaltenen Kanten beschrieben ist, fassen wir einen Weg $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m)$ als Teilmenge der Kanten auf, d.h. $P = \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq E$.