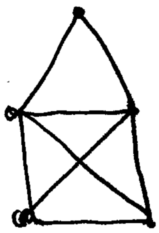
b) Die <u>Matchingzahl</u> von G ist

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}.$$

c) Ein Matching heißt <u>perfekt</u>, falls $2|M| = |V|$.

<u>Bsp 2:</u>

G 

$\nu(G) = 2$

G besitzt kein perfektes Matching

<u>Notation:</u> Da ein Weg eindeutig durch die enthaltenen Kanten beschrieben ist, fassen wir einen Weg $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_m, v_m)$ als Teilmenge der Kanten auf, d.h. $P = \{e_1, \dots, e_m\} \subseteq E$.

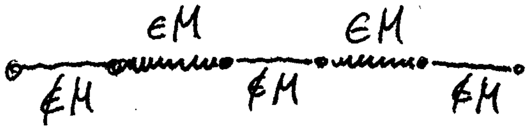
<u>Def 3:</u> Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G.

Ein Weg $P \subseteq E$ heißt <u>M-augmentierend</u>, falls:

a) Weder Start- noch Endknoten werden von M überdeckt: $\forall e \in M: v_0, v_m \notin e$.

b) Die Kanten $e_1, \dots, e_m$ sind alternierend nicht aus M und aus M:

$$e_1 \notin M,\ e_2 \in M,\ e_3 \notin M, \dots, e_{m-1} \in M,\ e_m \notin M.$$



<u>Satz 4:</u> Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G.
Dann gilt entweder $|M| = \nu(G)$, oder es gibt einen M-augmentierenden Weg.

<u>Beweis:</u> a) Ang. P ist ein M-augmentierender Weg. Dann ist die symmetrische Differenz von M und P

$$M' = M \triangle P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$$

ein Matching ($\rightarrow$ Aufgabe) mit $|M'| = |M| + 1$.
Also ist $|M| < \nu(G)$.

b) Ang. $|M| \neq \nu(G)$. Dann ex. ein Matching M' mit $|M'| > |M|$. Betrachte die Zusammenhangskomponenten von $G' = (V, M \cup M')$. Jeder Knoten hat höchstens zwei Nachbarn.

<u>Beh:</u> Jede Zusammenhangskomponente von G' ist ein Weg (eventuell ohne Kanten) oder ein Kreis.

<u>Bew:</u> Sei $v \in V$. Falls v keine Nachbarn in G' hat, ist es ein Weg ohne Kanten.

Falls v einen Nachbarn w hat, konstruiere einen Weg: Erster Knoten v, Zweiter Knoten w. Setze fort, bis wir entweder einen Knoten mit nur einem Nachbarn erreichen, oder auf einen Knoten stoßen, der bereits im Weg ist. Im zweiten Fall muss dies v sein, und die Komponente ist ein Kreis. Im ersten Fall überprüfe, ob v noch einen Nachbarn hat. Falls nicht, haben wir die gesamte Komponente in unserem Weg. Falls ja, gehe genauso in die "andere" Richtung und erhalte auch einen Weg. (Siehe auch Aufg. 3.2 von 2014)

Da $|M'| > |M|$, gibt es eine Zusammenhangs-Komponente in G', die mehr Kanten aus M' als aus M besitzt. Dies kann kein Kreis sein (warum?), also ist es ein M-augmentierender Weg. $\square$

<u>Algorithmus 5:</u> Bestimmung von $\nu(G)$

<u>Eingabe:</u> $G = (V, E)$

<u>Ausgabe:</u> $M \subseteq E$ Matching in G mit $|M| = \nu(G)$.

$M = \emptyset$

while $\exists$ M-augmentierender Weg P:

$M = M \Delta P$

Frage: Wie findet man P?

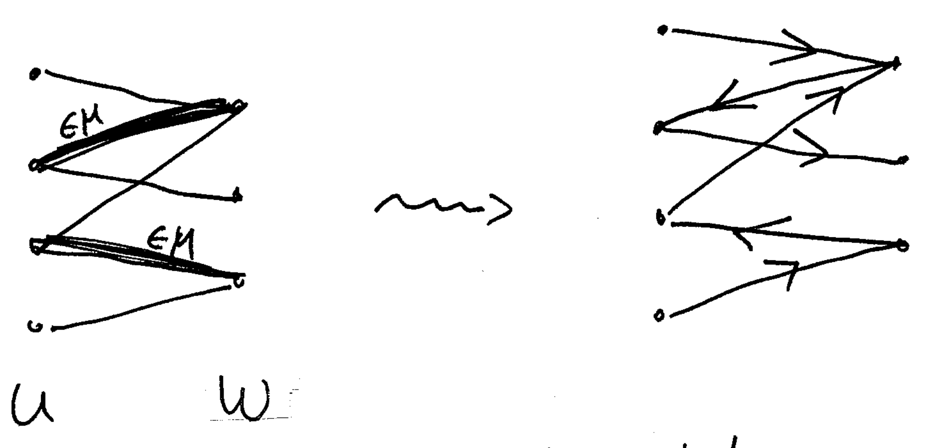
a) Falls G bipartit: einfach (→ hier)

b) Allgemein: "Blüten"-Algorithmus von Edmonds (→ VL "Effiziente Algorithmen")

Def. 6: Sei $G=(V,E)$ ein bipartiter Graph mit Partition $V = U \dot\cup W$, und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Definiere den (gerichteten) Residualgraph $D_M = (V, A_M)$ durch

$$A_M = \{(u,w) \in U \times W : \{u,w\} \in E \setminus M\} \cup \{(w,u) \in W \times U : \{u,w\} \in E \cap M\}.$$

Bsp. 7:



Satz 8: Sei $G=(V,E)$ ein bipartiter Graph mit Partition $V = U \dot\cup W$, und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G.

Seien $U_M \subseteq U$, $W_M \subseteq W$ die Knoten, die von M nicht überdeckt werden. Dann entspricht jeder gerichtete Weg in D_M von einem Knoten in U_M zu einem Knoten in W_M einem M-augmentierenden Weg in G, und umgekehrt.

<u>Beweis:</u> Klar nach Definition von D_M.

<u>Algorithmische Umsetzung</u>

Finde einen kürzesten Weg zwischen einem Knoten in U_M und einem Knoten in W_M mit Bellman-Ford, wobei $\ell(a) = 1$ für alle $a \in A_M$.

<u>Bemerkung:</u> Diese Strategie ist zwar effizient in dem Sinne, dass die Laufzeit nicht exponentiell ist, es gibt aber bessere Verfahren $\rightarrow$ Finde maximale Menge Knoten-disj. kürzester Wege mit Tiefensuche (Hopcroft-Karp) (optimal für bipartite Graphen mit nicht zu vielen Kanten)