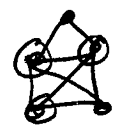
§ 3 Das Matchingtheorem von König

Ziel: Finde Min-Max-Charakterisierung der Matchingzahl $\nu(G)$ in einem bipartiten Graphen.

Def. 1: Sei $G = (V, E)$ ein unger. Graph.

a) Eine Menge $C \subseteq V$ heißt <u>Knotenüberdeckung</u> von G, falls jede Kante einen Knoten aus C enthält, d.h.

$$\forall e \in E : |C \cap e| \geq 1$$



b) Die Knotenüberdeckungszahl von G ist

$$\tau(G) = \min\{|C| : C \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung von } G\}.$$

Satz 2: (König, 1931)
Sei G ein bipartiter Graph. Dann gilt $\nu(G) = \tau(G)$.

Beweis: <u>$\nu(G) \leq \tau(G)$</u>: Sei M ein Matching in G und $C \subseteq V$ eine Knotenüberdeckung von G. Für jede Kante von M muss mindestens eines der Knoten zu C gehören, also ist $|M| \leq |C|$.

<u>$\nu(G) \geq \tau(G)$:</u> Sei M ein Matching in G mit $|M| = \nu(G)$, und $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \dots, \{u_m, w_m\}\}$ mit $u_i \in U$, $w_i \in W$.

Betrachte den Residualgraph D_M und definiere $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ durch

$$v_i = \begin{cases} w_i, & \text{falls es in } D_M \text{ einen ger. Weg von} \\ & U_M \text{ nach } w_i \text{ gibt} \\ u_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beh:</u> C ist eine Knotenüberdeckung

<u>Bew.:</u> Sei $\{a, b\} \in E$ mit $a \in U$, $b \in W$. Zu zeigen: $a \in C$ oder $b \in C$ (beides auch ok.)

<u>Fall 1:</u> $a \in U_M$, $b \in W_M$.
Nicht möglich, da dies nach Satz 2.8 ein M-augmentierender Weg ist, und $|M| = \nu(G)$ gilt (Nicht beides möglich nach Satz 2.4)

<u>Fall 2:</u> $a \in U_M$, $b \notin W_M$

Dann ist $(a,b) \in A_M$ und nach Def. $b \in C$.

Fall 3: $a \notin U_M$, $b \in W_M$.

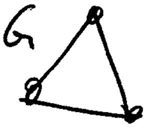
Wieder ist $(a,b) \in A_M$. Ang. $a \notin C$. Da a in einer Kante in M liegt ($a \notin U_M$), gibt es ein $w_i \in C$ mit $\{a, w_i\} \in M$, also $(w_i, a) \in A_M$. Nach Def. von C gibt es also im D_M einen Weg von U_M nach w_i, den wir um $(w_i, a), (a,b)$ verlängern können. Satz 2.8 gibt uns also einen M-augmentierenden Weg, was nach Satz 2.4 der Voraussetzung $|M| = \nu(G)$ widerspricht. Also ist $a \in C$.

Fall 4: $a \notin U_M$, $b \notin W_M$.

Falls $a \in C$, sind wir fertig. Falls $a \notin C$, gibt es wieder $w_i \in C$ mit $\{a, w_i\} \in M$, und es gibt einen gerichteten Weg in D_M von U_M nach w_i. Falls $w_i = b$, sind wir fertig. Falls $w_i \neq b$, kann der Weg um $(w_i, a), (a,b)$ verlängert werden ($\{a,b\} \notin M$), und $b \in C$ nach Definition. $\square$

Bemerkung 3: a) $\nu(G) \leq \tau(G)$ gilt für allgemeine Graphen.

b) $\nu(G) \geq \tau(G)$ gilt <u>nicht</u> allgemein.

Beispiel: G  $\nu(G) = 1$, $\tau(G) = 2$

<u>Korollar 4</u> (Hall, 1935)

Sei $G = (V, E)$ bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \dot\cup W$. Dann ist $\nu(G) = |U|$ genau dann wenn für alle $X \subseteq U$ gilt

$$|\Gamma(X)| := |\{w \in W : \{x, w\} \in E, x \in X\}| \geq |X|.$$

<u>Beweis</u>: <u>"$\Rightarrow$"</u>: Sei M ein Matching in G mit $|M| = \nu(G) = |U|$. Da dann jeder Knoten in U in einer Kante von M enthalten ist, folgt für $X \subseteq U$:

$$|X| = |\{w \in W : \{x, w\} \in M, x \in X\}| \leq |\Gamma(X)|.$$

<u>"$\Leftarrow$"</u>: <u>Zeige</u>: U ist Knotenüberdeckung mit $|U| = \tau(G)$ ($= \nu(G)$ und Satz 2)

Sei $C \subseteq V$ Knotenüberdeckung von G. Definiere $B = C \cap U$. Dann ist

$$C \supseteq B \cup \Gamma(U \setminus B),$$ weil C Knotenüb. ist.

Also:

$$|U| = |B| + |U\setminus B| \overset{\text{Vor.}}{\leq} |B| + |\Gamma(U\setminus B)|$$
$$\leq |C|$$

Da U eine Knotenüberdeckung ist, folgt die Beh. $\square$