Also:

$$|U| = |B| + |U \setminus B| \overset{\text{Vor.}}{\leq} |B| + |\Gamma(U \setminus B)|$$
$$\leq |C|$$

Da U eine Knotenüberdeckung ist, folgt die Beh. $\square$

<u>Korollar 5</u> ("Heiratssatz")

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \dot\cup W$.
G hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $|U| = |W|$ ist und

$$\forall X \subseteq U : |\Gamma(X)| \geq |X| .$$

<u>Beweis</u>: unmittelbar aus Korollar 4 abzuleiten. $\square$

<u>§4 Die ungarische Methode: Berechnung von Matchings mit maximalem Gewicht</u>

<u>Def. 1</u>: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $w : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion auf den Kanten von G.

a) Für $M \subseteq E$ definiere das <u>Gewicht</u> von M

als $$w(M) = \sum_{e \in M} w(e).$$

b) Die <u>gewichtete Matchingzahl</u> von G und w ist
$$\nu_w(G) = \max\{w(M) : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}$$

Falls $w(e) = 1 \ \forall e \in E$, dann ist $\nu_w(G) = \nu(G)$.

<u>Def. 2:</u> Sei $G = (V, E)$ ein unger. Graph und sei M ein Matching in G. Sei außerdem $w: E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfkt. Das Matching M heißt <u>extrem</u> (für G und w), falls für jedes Matching M' in G mit $|M'| = |M|$ gilt, dass $w(M') \leq w(M)$.

<u>Def. 3:</u> Sei $G = (V, E)$ unger. Graph mit Gewichtsfunktion $w: E \to \mathbb{R}$, und sei $M \subseteq E$ ein Matching in G. Definiere die Kantenlängenfunktion $\ell_M: E \to \mathbb{R}$ durch
$$\ell_M(e) = \begin{cases} w(e), & \text{falls } e \in M \\ -w(e), & \text{falls } e \notin M. \end{cases}$$

Für $P \subseteq E$ definiere $\ell_M(P) = \sum_{e \in P} \ell_M(e)$.

<u>Satz 4:</u> Seien $G = (V, E)$ und $w: E \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching für G und w, und sei $P \subseteq E$ ein M-augmentierender Weg minimaler

Länge. Dann ist $M' = M \triangle P$ extremes Matching für G und w.

<u>Beweis</u>: Sei N ein extremes Matching mit $|N| = |M|+1$. Wie im Beweis von Satz 2.4 enthält der Graph $G' = (V, M \cup N)$ dann eine Zusammenhangskomponente, die ein M-augmentierender Weg ist. Nenne diesen Q. Dann ist $\ell_M(Q) \geq \ell_M(P)$.
Es ist außerdem $N \triangle Q$ ein Matching mit $|N \triangle Q| = |M|$. Da M extrem ist, gilt also $w(N \triangle Q) \leq w(M)$. Zusammen:

$$\begin{aligned} w(N) &= w(N \triangle Q) + w(\underbrace{N \cap Q}_{\notin M}) - w(\underbrace{Q \setminus N}_{\in M}) \\ &= w(N \triangle Q) - \ell_M(Q) \leq w(M) - \ell_M(P) \\ &= w(M') \end{aligned}$$

Also ist M' extrem. □

<u>Algorithmus 5</u>: Die "ungarische" Methode (Egerváry 1931)

<u>Eingabe</u>: $G = (V, E)$ ungerichteter Graph, $w: E \to \mathbb{R}$ Gewichtsfkt.

<u>Ausgabe</u>: $\nu_w(G)$.

$M_0 = \emptyset$, $k = 1$

while Ex. M_{k-1}-augmentierender Weg

wähle M_{k-1}-augm. Weg P minimaler Länge (bzgl. $\ell_{M_{k-1}}$)

$M_k = M_{k-1} \triangle P$

$k = k+1$

output $\max\{w(M_i) : i = 0, 1, \dots, k-1\}$.

<u>Korollar 6</u>: Algorithmus 5 ist korrekt, d.h. er berechnet tatsächlich $\nu_w(G)$.

<u>Beweis</u>: Folgt direkt aus Satz 4 (und Satz 2.4), da jedes M_i ein extremes Matching ist (und wir alle Kardinalitäten prüfen). □

<u>Bestimmung eines M_{k-1}-augmentierenden Weges mit minimaler Länge für bipartite Graphen:</u>

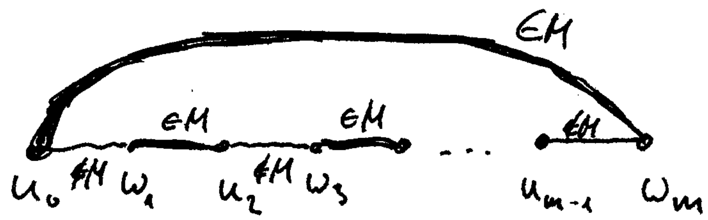
Sei $M = M_{k-1}$. Versehe den Residualgraph D_M mit Kantenlängenfkt. $\ell_M : A_M \to \mathbb{R}$ def. durch

$$\ell_M((a,b)) = \ell_M(\{a,b\}) \qquad \text{(siehe Def. 3)}$$

Nun können wir einen kürzesten Weg von U_M zu W_M mit Bellman-Ford finden, da D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge hat:

Satz 7: Sei $G=(V,E)$ bipartit und $w: E \to \mathbb{R}$. Sei $M \subseteq E$ ein extremes Matching für G, w. Dann besitzt der Residualgraph D_M keine gerichteten Kreise negativer Länge bzgl. ℓ_M.

Beweis: Angenommen $C \subseteq E$ ist ein gerichteter Kreis in D_M mit $\ell_M(C) < 0$. Dann haben wir folgende Situation in G:



Dann ist $M' = M \triangle C$ ein Matching mit $|M'| = |M|$ und es gilt

$$w(M') = w(M) - \ell_M(C) > w(M),$$

im Widerspruch dazu, dass M maximal ist. $\square$