χ_a ist <u>Charakter</u> von G:

$$\chi_a(x+y) = e^{2\pi i a(x+y)/n} = e^{(2\pi i a x)/n} \, e^{(2\pi i a y)/n}$$

$$= \chi_a(x) \cdot \chi_a(y).$$

($\to$ Beweis MacWilliams-Identität).

<u>Def.</u>: Sei $f \in \mathbb{C}^G$. Die <u>diskrete</u> <u>Fouriertransformierte (DFT)</u> von f ist

$$\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(x) = \langle f, \chi_x \rangle = \sum_{y \in G} f(y) \overline{\chi_x(y)}$$

$$= \sum_{y \in G} f(y) \chi_{-x}(y).$$

Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G$ ist linear.

<u>Satz</u> (Fundamentale Eigenschaften der DFT)

(i) $\mathcal{F}$ ist bijektiv.

(ii) $\mathcal{F}(f * g)(x) = \mathcal{F}(f)(x) \cdot \mathcal{F}(g)(x)$

(iii) (Fourier-Inversion) $f(x) = \frac{1}{n} \mathcal{F}\mathcal{F} f(-x)$
$$= \frac{1}{n} \hat{\hat{f}}(-x).$$

(iv) (Parseval-Plancherel-Formel)

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{n} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle, \text{ bzw. } \langle f, g \rangle = \frac{1}{n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Mit (iv) folgt, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{F}$ eine unitäre Abbildung ist.

<u>Bew.:</u>

<u>Lemma</u> (Orthogonalitätsrelation; siehe Kapitel 1.3)

Für $x, y \in G$ gilt $\langle \chi_x, \chi_y \rangle = \begin{cases} n, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Insbesondere sind $\frac{1}{\sqrt{n}} \chi_x$, $x \in G$, eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^G$.

<u>Bew.:</u> Wissen aus Kapitel 1.3:

$$(*) \quad \sum_{a \in G} \chi_x(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0 \\ |G|, & \text{falls } x = 0, \end{cases} \quad \text{und } n = |G|.$$

Nun ist

$$\langle \chi_x, \chi_y \rangle = \sum_{a \in G} \chi_x(a) \overline{\chi_y(a)}$$

$$= \sum_{a \in G} e^{\frac{2\pi i a x}{n}} e^{-\frac{2\pi i a y}{n}}$$

$$= \sum_{a \in G} e^{\frac{2\pi i a(x-y)}{n}} = \sum_{a \in G} \chi_{x-y}(a)$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{cases} n, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\boxtimes$

(i): folgt aus (iv)

(ii): $\mathcal{F}(f * g)(x)$

$$= \sum_{a \in G} (f * g)(a)\, \chi_{-x}(a)$$

$$= \sum_{a \in G} \sum_{b \in G} f(b)\, g(a-b)\, \chi_{-x}(a)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Substitution:} \\ c = a - b\end{array}}$$

$$= \sum_{b \in G} \sum_{c \in G} f(b)\, g(c)\, \chi_{-x}(b+c)$$

$$= \left(\sum_{b \in G} f(b)\, \chi_{-x}(b) \right) \cdot \left(\sum_{c \in G} g(c)\, \chi_{-x}(c) \right)$$

$$= \mathcal{F} f(x) \cdot \mathcal{F} g(x).$$

(iii): Weil $\mathcal{F}$ linear ist, genügt es, die Formel für eine Basis von $\mathbb{C}^G$ zu verifizieren:

Wähle Basis δ_y, $y \in G$. Dann gilt

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}\delta_y)(-x) = \sum_{a \in G} \mathcal{F}\delta_y(a)\, \chi_x(a)$$

$$= \sum_{a \in G} \sum_{b \in G} \delta_y(b)\, \chi_{-a}(b)\, \chi_x(a)$$

$$= \sum_{a \in G} \chi_{-a}(y)\, \chi_x(a)$$

$$= \sum_{a \in G} \chi_{-y}(a)\, \chi_x(a)$$

$$= \langle \chi_x, \chi_y \rangle$$

$$\overset{\text{Lemma}}{=} \begin{cases} n, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= n\, \delta_y(x).$$

<u>(iv)</u>: Wähle $f = \delta_y$, $y \in G$. Dann gilt einerseits

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in G} \delta_y(x)\, \overline{g(x)}$$

$$= \overline{g(y)}.$$

Andererseits,

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{x \in G} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)}$$

$$= \sum_{x \in G} \left(\sum_{a \in G} \delta_y(a) \chi_{-x}(a) \right) \overline{\left(\sum_{b \in G} g(b) \chi_{-x}(b) \right)}$$

$$= \sum_{x \in G} \chi_{-x}(y) \sum_{b \in G} \overline{g(b)}\ \overline{\chi_{-x}(b)}$$

$$= \sum_{b \in G} \overline{g(b)} \underbrace{\underbrace{\sum_{x \in G} \chi_{-x}(y) \overline{\chi_{-x}(b)}}_{\langle \chi_{-y}, \chi_{-b} \rangle}}_{\overset{\text{Lemma}}{=} \begin{cases} n, & \text{falls } y = b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

$$= n \overline{g(y)}.$$

$\boxtimes$

§ 3 Schnelle Fourier Transformation

FFT = fast Fourier transform

Cooley - Tukey (1965) :

- sehr effizienter Algorithmus zur Berechnung der DFT (war z.T. schon Gauß bekannt)
- wichtigster Algorithmus in der digitalen Signal-verarbeitung

Ziel: Für $G = \mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z}$ und für $f \in \mathbb{C}^G$ berechne $\hat{f} \in \mathbb{C}^G$,

wobei
$$\hat{f}(x) = \sum_{y \in G} f(y)\, e^{-\frac{2\pi i x y}{n}} \qquad (*)$$

möglichst effizient.

Direkter Ansatz: $n \cdot n = n^2$ Multiplikationen

$n \cdot (n-1) = n^2 - n$ Additionen

$2n^2 - n = O(n^2)$ arithmetische Operationen.

(zähle ab jetzt nur Multiplikationen)

Cooley-Tukey-FFT: Angenommen $n = p \cdot q$.

- Idee: Schreibe (x) so um, so dass eine Fouriertransformierte bzgl. der Gruppe $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ verwendet werden kann (Divide & Conquer-Ansatz)
- Trick: Schreibe (x) so um, dass aus der ein-dimensionalen Formel eine zwei-dimensionale wird.

Definiere $\omega_n = e^{\frac{-2\pi i}{n}}$

$$j(a,b) = aq + b \qquad 0 \le a < p \qquad 0 \le b < q$$

$$k(c,d) = cp + d \qquad 0 \le c < q \qquad 0 \le d < p.$$

Dann

$$\hat{f}(k(c,d)) = \sum_{a=0}^{p-1} \sum_{b=0}^{q-1} f(j(a,b))\, \omega_n^{k(c,d)\, j(a,b)}$$

und

$$\omega_n^{k(c,d)j(a,b)} = \omega_n^{k(c,d)aq}\ \omega_n^{k(c,d)b}$$

$$= \omega_p^{k(c,d)a}\ \omega_n^{k(c,d)b}$$

$$= \omega_p^{da}\ \omega_n^{k(c,d)b}$$

Also

$$\hat{f}(k(c,d)) = \underbrace{\sum_{b=0}^{q-1} \omega_n^{k(c,d)b}\, \tilde{f}(b,d)}_{\hat{=}\ \text{DFT mod } q}$$

$$\tilde{f}(b,d) = \underbrace{\sum_{a=0}^{p-1} f(j(a,b))\, \omega_p^{da}}_{\text{DFT mod } p}$$

Anzahl der Multiplikation:

- für jedes (b,d) berechne $\tilde{f}(b,d)$:

  $q \cdot p \cdot p = qp^2$ Multiplikationen

- für jedes (c,d) berechne $\hat{f}(k(c,d))$

  $q \cdot p \cdot q = q^2 p$ Multiplikationen

Zusammen: $pq(p+q) = n(p+q)$ Multiplikationen

Rekursive Anwendung auf $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ liefert

$\Theta(n(p_1 + p_2 + \dots + p_m))$ Multiplikationen.

Also, falls $n = 2^m$, dann $O(n \log n)$ Multiplikationen.