Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

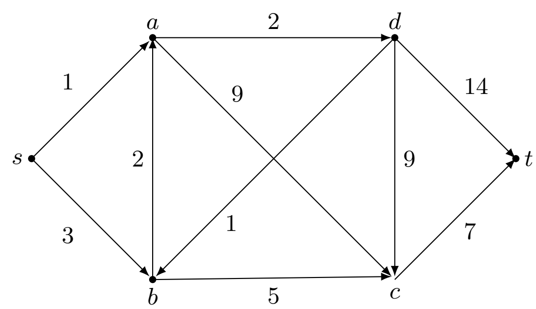
Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 4 —

Aufgabe 4.1 (10 Punkte) Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Zeigen Sie: Die maximale Anzahl von kantendisjunkten Wegen von s nach t in D ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes $\delta^{\text{out}}(U)$ in D, wobei $U \subseteq V$ mit $s \in U$ und $t \in V \setminus U$.

Aufgabe 4.2 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie im rechtsstehenden Graphen mit gegebener Kapazitätsfunktion einen maximalen s-t-Fluss und einen minimalen s-t-Schnitt mit Hilfe des Ford-Fulkerson Algorithmus.



b) Zeigen Sie für allgemeine gerichtete Graphen $D = (V, A)$: Falls c ganzzahlig ist (das heißt $c : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$), dann gibt es einen ganzzahligen optimalen s-t-Fluss f mit $f \leq c$.

Aufgabe 4.3 (10 Punkte) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und sei $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Zirkulation, das heißt f ist eine s-t-Fluss mit $s = t$.
Zeigen Sie: Es existiert eine Zirkulation f', so dass f' ganzzahlig ist und für alle $a \in A$ gilt $\lfloor f(a) \rfloor \leq f'(a) \leq \lceil f(a) \rceil$.

Tipp: Sei $g_f : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_f(v) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} f(a)$. Zeigen Sie zunächst:

$$g_f(v) = 0 \ \forall v \in V \text{ genau dann, wenn } f \text{ eine Zirkulation ist.}$$

Aufgabe 4.4 (Präsenzübung) Modellieren Sie das Problem der Berechnung der maximalen Kardinalität eines Matchings in einem bipartiten Graphen als ein maximales Flussproblem.

Abgabe: Bis Dienstag, 10.05. 12 Uhr.
Lösungen zu den Aufgaben 4.1, 4.2 und 4.3 bitte im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.