



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 5 —

Aufgabe 5.1 (7 + 3 = 10 Punkte)

- Für welche $p \geq 0$ ist die Menge $B_3^p = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p \leq 1\}$ konvex?
- Gelten die gleichen Werte p für $B_n^p = \{\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1\}$ mit $n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$?

Aufgabe 5.2 (4 · 2,5 = 10 Punkte) Prüfen Sie für die folgenden Mengen die Eigenschaften: konvexer Kegel, spitz, volldimensional, abgeschlossen:

- $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$
- $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \geq 0 \forall t \in [0, 1]\}$
- $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 \geq x_3^2\}$
- $M_4 = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_k = 0, x_{k+1} > 0, \text{ für ein } k \text{ mit } 1 \leq k \leq n\}$

Aufgabe 5.3 (2 + 2 + 6 = 10 Punkte) Zeigen Sie folgende Aussagen:

- $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann affin unabhängig, wenn $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig sind.
- Es gibt höchstens $n + 1$ affin unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^n .
- Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist jedes $x \in \text{conv}(S)$ darstellbar als Konvexkombination von höchstens $n + 1$ Elementen aus S .

Aufgabe 5.4 (Präsenzaufgabe) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls ihr *Epigraph*

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) \leq \alpha\}$$

eine konvexe Menge ist. Für $k = 1, \dots, n$ definiere die Funktion $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Vektor (x_1, \dots, x_n) die Summe seiner k größten Einträge zuordnet. Zeige, dass f_k für alle k konvex ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 24.05., 12 Uhr.

Lösungen zu den Aufgaben 5.1, 5.2 und 5.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.