Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 6 —

Aufgabe 6.1 (10 Punkte) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Zeigen oder widerlegen Sie: C ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in C$ gilt, dass $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$ ist.

Aufgabe 6.2 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Geben Sie für jedes $n \geq 2$ zwei nichtleere konvexe Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ an, so dass $A \cap B = \emptyset$ und

- $\sup_{x \in A} a^\mathsf{T} x \neq a^\mathsf{T} x$ für alle $x \in A$,
- $\inf_{y \in B} a^\mathsf{T} y \neq a^\mathsf{T} y$ für alle $y \in B$,
- $\sup_{x \in A} a^\mathsf{T} x = \inf_{y \in B} a^\mathsf{T} y$.

Tipp: Finden Sie ein Beispiel für $n = 2$ und verallgemeinern Sie dieses.

b) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, $C \neq \emptyset$, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Zeigen Sie, dass es dann ein $z \in \operatorname{ext}(C)$ gibt, so dass $f(z) \geq f(x)$ für alle $x \in C$ gilt.

Aufgabe 6.3 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Geben Sie alle Ecken von $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

b) Sei P ein Polyeder mit $P \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass P eine Ecke besitzt.

Aufgabe 6.4 (Präsenzaufgabe)

a) Sei $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, x \geq 3\}$. Geben Sie alle Ecken von P an.

b) Sei
$$P_n = \text{conv}\{(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))^\mathsf{T} : \pi \in S_n\},$$
wobei S_n die Menge aller Permutationen $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ ist. Zeigen Sie: $\dim(P_3) \geq 2$.

c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A = \overline{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann $\operatorname{conv}(A) = \overline{\operatorname{conv}(A)}$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 31.05., 12 Uhr.
Lösungen zu den Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.