Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

# Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

**— Aufgabenblatt 7 —**

**Aufgabe 7.1** (10 Punkte) Schreiben Sie das Polytop

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{conv}\{\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3, \pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm 2e_3\} \\ &= \operatorname{conv}\{e_1+e_2+e_3, -e_1+e_2+e_3, e_1-e_2+e_3, -e_1-e_2+e_3, \\ &\qquad e_1+e_2-e_3, -e_1+e_2-e_3, e_1-e_2-e_3, -e_1-e_2-e_3, \\ &\qquad 2e_1, -2e_1, 2e_2, -2e_2, 2e_3, -2e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

als Polyeder, wobei $e_i$ der $i$-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^3$ ist.

**Aufgabe 7.2** (10 Punkte) Lösen Sie das folgende Maximierungsproblem mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin:

$$\max\{c^\mathsf{T} x : Ax \leq b\},$$

wobei

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 7.3** (5 + 5 = 10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax > 0$ wenn es keinen Vektor $y \geq 0$ mit $y^T A = 0$ und $\sum_{i=1}^m y_i = 1$ gibt.

b) Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax > 0$, wenn es keinen Vektor $y \neq 0$ mit $y^\mathsf{T} A = 0$ und $y \geq 0$ gibt.

**Aufgabe 7.4** (Präsenzaufgabe)

a) Schreiben Sie das folgende Polytop als Polyeder, wobei $e_i$ der $i$-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^2$ ist:

$$P = \operatorname{conv}\{0, 2e_1, 2e_2, 2(e_1+e_2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

b) Entscheiden Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin, ob das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ leer ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Abgabe:** Bis Dienstag, 07.06., 12 Uhr.
Lösungen zu den Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.