# Kapitel III: Flüsse in Netzwerken

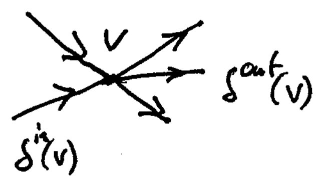
## §1 Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem

**Def. 1**: Sei $D=(V,A)$ ein gerichteter Graph, und seien $s,t\in V$. Wir nennen $s$ die Quelle (source) und $t$ die Senke (sink, terminal).

a) Eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt s-t-Fluss, falls das folgende Flusserhaltungsgesetz für alle Knoten außer $s$ und $t$ erfüllt ist:

$$\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \sum_{a\in\delta^{in}(v)} f(a) = \sum_{a\in\delta^{out}(v)} f(a),$$

wobei
$$\delta^{in}(v) = \{(w,v)\in A: w\in V\} \quad \text{und}$$
$$\delta^{out}(v) = \{(v,w)\in A,\ w\in V\}.$$




b) Der Wert eines s-t-Flusses ist

$$\text{value}(f) = \sum_{a\in\delta^{out}(s)} f(a) - \sum_{a\in\delta^{in}(s)} f(a)$$

$$\left( = \sum_{a\in\delta^{in}(t)} f(a) - \sum_{a\in\delta^{out}(t)} f(a) \right)$$

c) Ein s-t-Fluss heißt **beschränkt** durch eine **Kapazitätsfunktion** $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls

$$\forall a \in A: \; f(a) \leq c(a) \quad \text{gilt.}$$

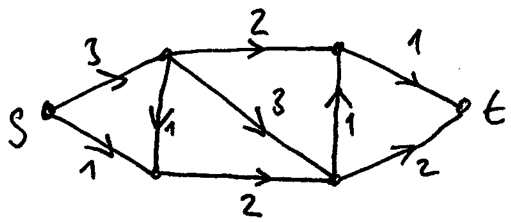
Notation: $f \leq c$.

d) Als **Max-Flow-Problem** bezeichnen wir das Folgende:

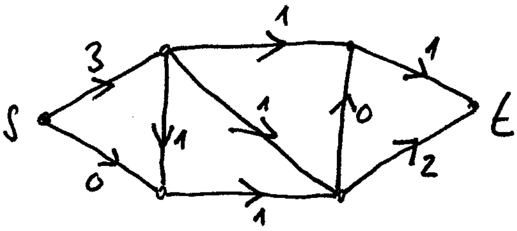
**Gegeben:** $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

**Gesucht:** $\max\{\text{value}(f) : f: A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ s-t-Fluss}, f \leq c\}$.

**Beispiel 2:**




value$(f) \in [0, 3]$ für alle $f \leq c$




Fluss $f$ mit value$(f) = 3$.

**Bemerkung:** Das Maximum existiert und liegt zwischen Null und $\sum_{a \in \delta^{out}(s)} c(a)$.

**Def. 3:** Sei $D = (V, A)$ ger. Graph mit $s, t \in V$.

a) Jede Teilmenge $U \subseteq V$ definiert die Schnitte

$$\delta^{in}(U) = \{(v,u) \in A : v \in V \setminus U,\ u \in U\}$$ und

$$\delta^{out}(U) = \{(u,v) \in A : u \in U,\ v \in V \setminus U\}.$$

b) Falls $s \in U$, $t \in V \setminus U$ ist, heißen die Schnitte $\delta^{in}(U)$, $\delta^{out}(U)$ s-t-Schnitte.

c) Sei $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Kapazitätsfunktion. Dann ist

$$c(\delta^{out}(U)) = \sum_{a \in \delta^{out}(U)} c(a)$$ die Kapazität des Schnitts $\delta^{out}(U)$. Analog für $\delta^{in}(U)$.

d) Als Min-Cut-Problem bezeichnen wir das Folgende:

Gegeben: $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Gesucht: $\min \{ c(\delta^{out}(U)) : U \subseteq V,\ s \in U,\ t \in V \setminus U \}$

Satz 4 (Max-Flow-Min-Cut-Theorem, Ford-Fulkerson 1954)

Seien $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben.

Dann gilt:

$$\max_{\substack{f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ f \text{ s-t-Fluss} \\ f \leq c}} \text{value}(f) = \min_{\substack{U \subseteq V \\ s \in U,\ t \in V \setminus U}} c(\delta^{out}(U))$$

**Zusatz:** Falls $c: A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dann gibt es einen maximalen Fluss $f: A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

**Lemma 5:** Seien $D=(V,A)$, $s,t \in V$, $c: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, und sei $f: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $s$-$t$-Fluss mit $f \leq c$.
Für $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \in V \setminus U$ gilt dann

$$\text{value}(f) \leq c(\delta^{out}(U)),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$\forall a \in \delta^{out}(U): f(a) = c(a) \quad \text{und}$$
$$\forall a \in \delta^{in}(U): f(a) = 0$$

**Beweis:**

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{out}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(s)} f(a)$$

$$= \sum_{a \in \delta^{out}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(s)} f(a) + \sum_{v \in U \setminus \{s\}} \underbrace{\left( \sum_{a \in \delta^{out}(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(v)} f(a) \right)}_{= 0 \text{ (wegen Flusserhaltung)}}$$

$$= \sum_{v \in U} \left( \sum_{a \in \delta^{out}(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(v)} f(a) \right)$$

$$= \sum_{a \in \delta^{out}(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(U)} f(a)$$

$$\leq \sum_{a \in \delta^{out}(U)} c(a) = c(\delta^{out}(U)).$$

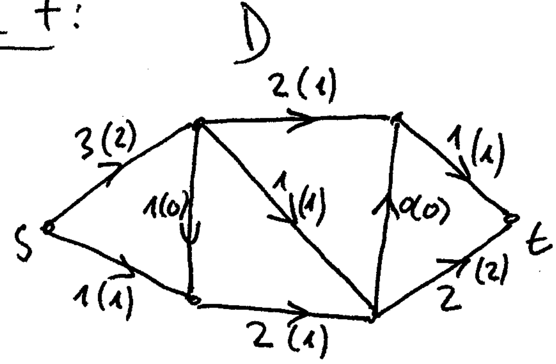
$\square$

**Def. 6:** Seien $D=(V,A)$, $s,t\in V$, $c: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, und $f: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ s-t-Fluss mit $f\leq c$ gegeben. Definiere den <u>Residualgraph</u> $D_f=(V,A_f)$ durch

$$A_f = \{a\in A : f(a) < c(a)\} \cup \{a^{-1}\in A^{-1} : f(a) > 0\},$$

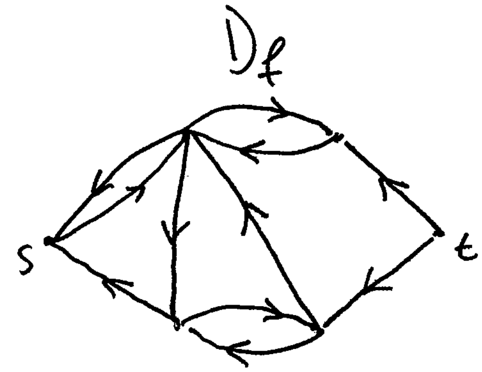
wobei für $a=(u,v)\in A$ $a^{-1}=(v,u)$ und $A^{-1}=\{a^{-1} : a\in A\}$ definiert wird.

**Beispiel 7:**




$c$ $(f)$

$\rightsquigarrow$




**Lemma 8:** Seien $D=(V,A)$, $s,t\in V$, $c: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, und $f: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ s-t-Fluss mit $f\leq c$ gegeben. Angenommen $D_f$ enthält keinen gerichteten s-t-Weg. Sei $U\subseteq V$ die Menge der Knoten, die in $D_f$ von $s$ aus erreichbar sind. Dann ist $\text{value}(f) = c(\delta^{\text{out}}(U))$.

<u>Bemerkung</u>: Ein solches $f$ ist also optimal im Sinne von Lemma 5.

<u>Beweis von Lemma 8</u>: Im Beweis von Lemma 5 haben wir bereits berechnet, dass

$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(U)} f(a) \quad \text{ist.}$$

Nach Voraussetzung ist $a \notin A_f$ für $a \in \delta^{\text{out}}(U)$, also $f(a) = c(a)$.

Für $a \in \delta^{\text{in}}(U)$ gilt $\bar{a}' \notin A_f$, also $f(a) = 0$.

Die Behauptung folgt nach Lemma 5. $\square$