Bemerkung: Ein solches f ist also optimal im Sinne von Lemma 5.

Beweis von Lemma 8: Im Beweis von Lemma 5 haben wir bereits berechnet, dass
$$\text{value}(f) = \sum_{a \in \delta^{out}(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(U)} f(a) \quad \text{ist.}$$
Nach Voraussetzung ist $a \notin A_f$ für $a \in \delta^{out}(U)$, also $f(a) = c(a)$.
Für $a \in \delta^{in}(U)$ gilt $a^{-1} \notin A_f$, also $f(a) = 0$.
Die Behauptung folgt nach Lemma 5. $\square$

Beweis von Satz 4:

max $\leq$ min: Lemma 5.

max $\geq$ min: Sei f ein optimales s-t-Fluss mit $f \leq c$. Zu zeigen: Es gibt ein $U \subseteq V$ mit $s \in U$, $t \in V \setminus U$, und $\text{value}(f) = c(\delta^{out}(U))$.

Betrachte D_f. Falls es keinen ger. s-t-Weg in D_f gibt, liefert Lemma 8 ein solches U.

Ang. es ex. doch ein solcher s-t-Weg P.

Definiere $\chi^P : A \to \mathbb{R}$ durch
$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in P \\ -1 & \text{falls } a^{-1} \in P \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Beachte dass P nicht sowohl a als auch a' enthalten kann, da P sonst kein Weg wäre.)

Betrachte nun $f' = f + \varepsilon \chi^P$ für $\varepsilon > 0$.

Dann ist $f'(a) > f(a)$ für $a \in P$ mit $f(a) < c(a)$,

$f'(a) < f(a)$ für $a' \in P$ mit $f(a) > 0$,

und $f'(a) = f(a)$ sonst.

Beachte ausserdem, dass das Flusserhaltungsgesetz für f' erfüllt ist, also ist f' ebenfalls ein s-t-Fluss, solange ε klein genug ist.

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ erreichen wir außerdem $f' \leq c$. Somit ergibt sich

$$\text{value}(f') = \text{value}(f) + \varepsilon,$$ und f' ist zulässig für das Max-Flow-Problem. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass f ein optimaler s-t-Fluss ist.

<u>Zusatz:</u> Aufgabe. $\square$

<u>Algorithmus 9</u> (Ford-Fulkerson)

<u>Eingabe:</u> $D = (V, A)$, $s, t \in V$, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

<u>Ausgabe:</u> $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ s-t-Fluss mit $f \leq c$, value(f) maximal

$f = 0$

while $\exists$ ger. s-t-Weg P in D_f

$f = f + \varepsilon \chi^P$, wobei $\varepsilon > 0$ maximal mit $0 \leq f + \varepsilon \chi^P \leq c$ gewählt wird.

Satz 10: Falls $c(a) \in \mathbb{Q}$ für alle $a \in A$, dann terminiert Algorithmus 9 in endlich vielen Schritten.

Beweis: Bemerke, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $K \cdot c(a) \in \mathbb{N}$ für alle $a \in A$. Das heißt aber, dass ε in jeder Iteration ein Vielfaches von $1/K$ ist, und sich also der Wert von f um mindestens $1/K$ erhöht.

Da $\text{value}(f) \leq c(\delta^{out}(\{s\}))$ ist, terminiert der Algo. nach höchstens $K \cdot c(\delta^{out}(s))$ Schritten. $\square$

Bemerkung 11: a) Es gibt Beispiele mit $c(a) \notin \mathbb{Q}$, so dass Algorithmus 9 nicht terminiert (→ Schrijver: CO, 10.4a)

b) Welchen ger. s-t-Weg in D_f verwenden wir?

Dinitz (1970), Edmonds-Karp (1972): Wähle s-t-Weg minimaler Länge. Dann ist die Anzahl der Iterationen höchstens $|V| \cdot |A|$, und somit insbesondere unabhängig von der Kapazitätsfunktion c.

Teil B – Einführung in die lineare Optimierung

Viele Optimierungsprobleme lassen sich als lineares Programm formulieren:

Gegeben: $c \in \mathbb{R}^n$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$

Gesucht: $\min \{ c^T x : x \in \mathbb{R}^n : a_j^T x \leq b_j$ für alle $j = 1, \ldots, m \}$.

Der Vektor c definiert die (lineare) Zielfunktion $x \mapsto c^T x$. Die linearen Ungleichungen $a_j^T x \leq b_j$ sind die Nebenbedingungen.

Notation: $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und

$$A = \begin{bmatrix} \text{—} \, a_1^T \, \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \, a_m^T \, \text{—} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ziel:
- Finde geometrische Beschreibung der Menge $\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$ der zulässigen Lösungen
- Finde geometrische Begründung für Min-Max-Charakterisierungen

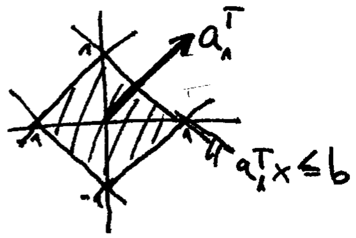
- Verwende geometrische Beobachtungen, um Algorithmen für lineare Programme zu finden.

Kapitel IV: Konvexe Mengen

§1 Grundbegriffe

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

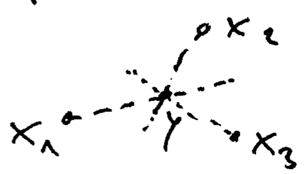
$\leadsto$ geometrische Darstellung von $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \le b\}$:



Def. 1: a) Seien $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $y \in \mathbb{R}^n$ eine Konvexkombination von $x_1, \dots, x_N$, falls

$$y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_N \ge 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Bsp: Schwerpunkt ist Konvexkombination.



$$y = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

b) Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn sie bezüglich der Bildung von Konvexkombinationen abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \dots, x_N \in C\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \in C$$

c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>Konvexe Hülle</u> von A ist

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ konvex}}} B$$