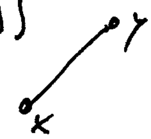
$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x_1,\dots,x_N \in C\ \forall \alpha_1,\dots,\alpha_N \geq 0: \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \in C$$

c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>konvexe Hülle</u> von A ist

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ konvex}}} B$$

d) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die <u>Verbindungsstrecke</u> zwischen x und y ist

$$[x,y] = \operatorname{conv}\{x,y\} = \{\alpha x + (1-\alpha) y : \alpha \in [0,1]\}$$



e) Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (konvexes) <u>Polytop</u>, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

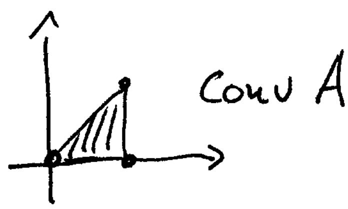
$$P = \operatorname{conv}\{x_1,\dots,x_N\}.$$

D.h. Polytope sind konvexe Hüllen <u>endlich</u> vieler Punkte.

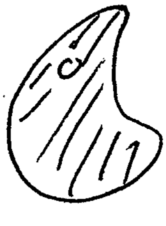
<u>Bemerkung 2</u>: Da der Durchschnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist, ist conv A die inklusions-kleinste konvexe Menge, die A enthält.

<u>Beispiel 3</u>:

a) $$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



b)



nicht konvex

c) Sei $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\}$ die Euklidische Einheitskugel. B_n ist konvex:

Seien $x_1, \dots, x_N \in B_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \ge 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

Dann ist

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \Big\| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \sum_{i=1}^{N} \|\alpha_i x_i\| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{\|x_i\|}_{\le 1} \le \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

<u>Satz 4</u> Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex genau dann, wenn für alle $x, y \in C$ gilt: $[x, y] \in C$.

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" klar, Spezialfall $N = 2$.

„$\Leftarrow$" Induktion über N: Jede Konvexkombination mit höchstens N Punkten aus C liegt in C.

$N = 1$: klar.

$N \to N+1$: Sei $y = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$ mit $x_i \in C$, $\alpha_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i = 1$.

<u>Fall 1:</u> $\alpha_{N+1} = 1$

Dann ist $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$ und $y = x_{N+1} \in C$.

<u>Fall 2</u>: $\alpha_{N+1} \neq 1$.

Nach Vor. ist $y' = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} x_i \in C$, da

$$\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{N+1}} = \frac{1}{1-\alpha_{N+1}} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \frac{1-\alpha_{N+1}}{1-\alpha_{N+1}} = 1.$$

Außerdem gilt:

$$y = (1-\alpha_{N+1})y' + \alpha_{N+1} x_{N+1} \in [y', x_{N+1}] \subseteq C. \quad \square$$

<u>Satz 5</u>: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\operatorname{conv}(A) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \text{ mit } N \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_N \in A,\ \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \Big\}$$

Das heißt, $\operatorname{conv}(A)$ besteht aus allen Konvex-Kombinationen der Elemente von A.

<u>Beweis</u>: „$\subseteq$": Klar, da die rechte Seite konvex ist und A enthält.

„$\supseteq$": Sei B konvex mit $A \subseteq B$. Nach Def. von konvex gilt:

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \dots, x_N \in A,\ \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \in B$$

$\square$

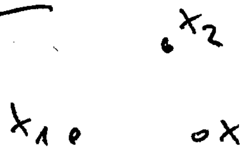
<u>Def. 6</u>: Die Punkte $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ heißen <u>affin unabhängig</u>, falls

$\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$

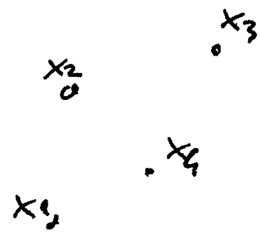
Äquivalent: $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \neq 0$ oder $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$

Äquivalent: $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sind linear unabh.

<u>Beispiel 7</u>:



affin unabh.



affin abhängig

<u>Def. 8</u>: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>Dimension</u> von A ist

$$\dim A = \max\{N-1 : x_1, \dots, x_N \in A \text{ affin unabh.}\}.$$

<u>Def. 9</u>: a) Seien $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $w \in \mathbb{R}^n$ eine <u>konische Kombination</u> von $v_1, \dots, v_N$, falls

$$w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i \geq 0.$$

b) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (konvexer) <u>Kegel</u>, falls K unter der Bildung von konischen Kombinat. abgeschlossen ist.

c) Ein konvexer Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>spitz</u>, falls aus $x \in K, -x \in K$ immer $x = 0$ folgt.

d) Ein konvexer Kegel heißt <u>ordentlich</u>, falls er spitz, abgeschlossen (in der Topologie von $\mathbb{R}^n$) und voll-dimensional ist ($\dim K = n$).

Ordentliche Kegel können als <u>Positivitätsbereich</u> aufgefasst werden und definieren eine <u>partielle Ordnung</u> auf $\mathbb{R}^n$:

$$x \geq_K y \;:\Longleftrightarrow\; x-y \in K$$

(Somit: $x \geq_K 0 \Leftrightarrow x \in K$)

<u>Bsp:</u> $K = [0,\infty) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [x \geq_K y \Leftrightarrow x \geq y]$

Es kann $x,y \in \mathbb{R}^n$ geben mit $x \not\geq_K y$ und $y \not\geq_K x$, d.h. x,y sind nicht vergleichbar bzgl. K (darum <u>partielle</u> Ord.)

e) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die <u>Konische Hülle</u> von A ist

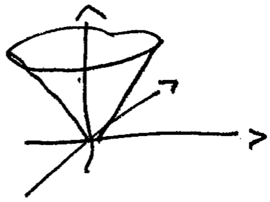
$$\operatorname{cone}(A) = \bigcap_{\substack{K \supseteq A \\ K \text{ Kegel}}} K$$

f) Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>endlich erzeugter Kegel</u> falls $K = \operatorname{cone}\{v_1,\dots,v_N\}$ für $v_1,\dots,v_N \in \mathbb{R}^n$ ist.

<u>Beispiel 10</u>

a) $\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \operatorname{cone}\{e_1,\dots,e_n\}$ ist ein endlich erzeugter Kegel („Nichtnegativer Orthant")

b) $\mathcal{L}^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t\}$ ist ein Kegel, aber nicht endlich erzeugt („Lorentzkegel")



<u>Satz 11</u> a) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvexer Kegel genau dann, wenn für alle $v, w \in K$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$ gilt: $\alpha v + \beta w \in K$.

b) $\operatorname{cone}(A) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i \text{ mit } N \in \mathbb{N},\ v_1, \dots, v_N \in A,\ \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 \right\}$

<u>Beweis</u> a) Genau wie Satz 4.

b) Genau wie Satz 5. $\square$