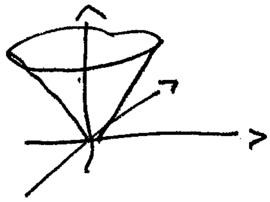
b) $\mathcal{L}^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t\}$ ist ein Kegel, aber nicht endlich erzeugt („Lorentzkegel")



<u>Satz 11</u> a) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvexer Kegel genau dann, wenn für alle $v, w \in K$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$ gilt: $\alpha v + \beta w \in K$.

b) $\text{cone}(A) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i \text{ mit } N \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_N \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 \right\}$

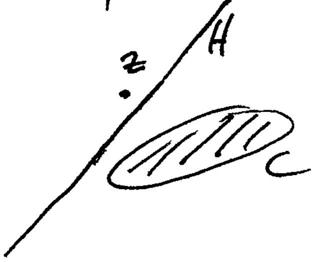
<u>Beweis</u> a) Genau wie Satz 4.

b) Genau wie Satz 5. $\square$

<u>§ 2 Trennungssätze</u>

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, $C \neq \emptyset$.

<u>Fundamentale Eigenschaft</u>: Jeder Punkt $z \notin C$ kann durch eine (affine) Hyperebene von C getrennt werden.



Verallgemeinerung in der Funktionalanalysis:
Satz von Hahn-Banach.

__Hier:__ leite einen konstruktiven Beweis dieser Eigenschaft her.

__Def. 1:__ a) Eine Menge $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt __(affine) Hyperebene__, falls es einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$$

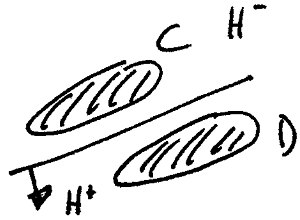
b) Die konvexen und abgeschlossenen Mengen

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \geq \delta\} \quad \text{und}$$
$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}$$

heißen __Halbräume__.

__Def. 2:__ Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$.

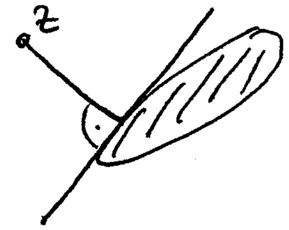
a) Eine Hyperebene H heißt __Trennhyperebene__ von C und D, falls $C \subseteq H^-$ und $D \subseteq H^+$, oder umgekehrt.



b) Eine Hyperebene H heißt __Stützhyperebene__ von C, falls $C \subseteq H^-$ und $C \cap H \neq \emptyset$.

Wie findet man Trenn- und Stützhyperebenen?

→ <u>Metrische Projektion</u>: beste Approximation von $z \notin C$ in C. Falls C affin linear: orthogonale Projektion von z auf C.



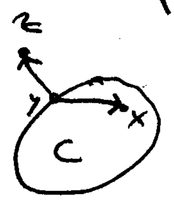
<u>Lemma 3</u>: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq \emptyset$, und sei $z \notin C$. Dann

$$\exists!\, y \in C: \quad \|y - z\| = \inf_{x \in C} \|x - z\|,$$

(<u>Notation</u>: $y = \pi_C(z)$.)

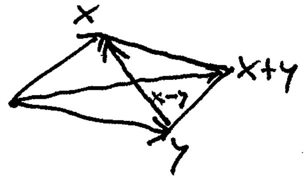
und es gilt

$$(z-y)^T(x-y) \le 0 \quad \text{für alle } x \in C.$$



<u>Beweis</u>: (Sogar für bel. Hilberträume)

Verwende die Parallelogrammgleichung:



$x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Existenz von y: Sei $d = \inf_{x\in C} \|x-z\|$. Wir können annehmen (durch Translation von z und C um $-z$) dass $z=0$ ist, also $d = \inf_{x\in C} \|x\|$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in C$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = d$.

Beh: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge

Bew: Für $n,m\in\mathbb{N}$ gilt die Parallelogrammgl., also

$$\underbrace{\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2}_{\substack{\in C \\ \Rightarrow \|\dots\|^2 \geq d^2}} + \underbrace{\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{\|x_n\|^2}_{\to d^2} + \frac{1}{2}\underbrace{\|x_m\|^2}_{\to d^2}}_{\to d^2}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2 \to 0 .$$

//

Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also im $\mathbb{R}^n$. Da C abg. ist, liegt der Grenzwert in C. Dann hat $y = \lim_{n\to\infty} x_n \in C$ die gewünschte Eigenschaft. (Winkel siehe unten)

Eindeutigkeit von y: Ang. es gibt $y, y' \in C$, $y \neq y'$ und $\|y\| = \|y'\| = \inf_{x\in C} \|x\|$. Dann ist

$$\underbrace{\left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2}_{\in C} < \left\|\frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2 \overset{\text{P.-G.}}{=} \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y'\|^2 = d^2$$

im Widerspruch zur Minimalität von d.

$(z-y)^T(x-y) \le 0$ für alle $x \in C$!

Sei $\alpha \in [0,1]$. Dann ist für $x \in C$

$$\|z-y\|^2 \le \|z - \underbrace{(\alpha x + (1-\alpha)y)}_{\in C}\|^2$$

$$= \|z-y+\alpha(y-x)\|^2$$

$$= (z-y+\alpha(y-x))^T(z-y+\alpha(y-x))$$

$$= \|z-y\|^2 + \underbrace{2\alpha(z-y)^T(y-x) + \alpha^2\|y-x\|^2}_{\Rightarrow\ \ge 0}$$

Das heißt für $\alpha \in (0,1]$:

$$2(z-y)^T(y-x) \ge -\alpha\|y-x\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (z-y)^T(x-y) \le \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2$$

Da α beliebig klein wird, folgt die Behauptung. $\square$

<u>Korollar 4:</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq \emptyset$. Dann ist die metrische Projektion Π_C Lipschitzstetig mit Konstante 1. D.h. Π_C ist eine Kontraktion.

<u>Beweis:</u> Seien $z, z' \in \mathbb{R}^n$, $y = \Pi_C(z)$, $y' = \Pi_C(z')$.
OE sei $z' = 0$. Zu zeigen: $\|y-y'\| \le 1 \cdot \|z\|$.
Nach Lemma 3 ist

$$(z-y)^T(y'-y) \le 0 \quad \text{und} \quad (-y')^T(y-y') \le 0,$$

zusammen also $(-z+y-y')^T(y-y') \leq 0$.

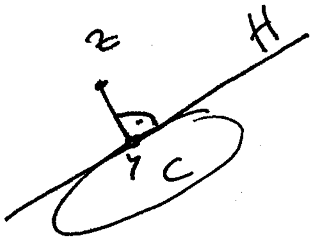
Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
\|y-y'\|^2 &= (y-y')^T(y-y') \\
&= \underbrace{(-z+y-y')^T(y-y')}_{\leq 0} + z^T(y-y') \\
&\leq z^T(y-y') \\
&= z^Tz + z^T(-z+y-y') \\
&= z^Tz + \underbrace{(y-y')^T(-z+y-y')}_{\leq 0} + \underbrace{(z-y+y')^T(-z+y-y')}_{\leq 0} \\
&\leq z^Tz = \|z\|^2
\end{aligned}
$$

$\square$

<u>Satz 5</u>: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq \emptyset$, und sei $z \notin C$. Dann gibt es eine Trennhyperebene von $\{z\}$ und C.

<u>Beweis</u>: Definiere Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ mit $c = z - y$ und $\delta = c^T y$, wobei $y = \Pi_C(z)$.



<u>Beh</u>: a) $z \in H^+$.

b) $C \subseteq H^-$.

<u>Bew</u>: a)

$$
\begin{aligned}
c^T z \geq \delta &\iff c^T z \geq c^T y \\
&\iff c^T(z-y) \geq 0 \\
&\iff (z-y)^T(z-y) \geq 0 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

b) Für $x \in C$ gilt

$$c^T x \leq \delta \iff (z-y)^T x \leq (z-y)^T y$$
$$\iff (z-y)^T (x-y) \leq 0$$

Dies gilt nach Lemma 3. $\square$

<u>Bemerkung 6</u>: Die im Beweis konstruierte Hyperebene enthält y und ist also Stützhyperebene von C. Eine strikte Trennhyperebene von $\{z\}$ und C, also mit $z \in H^+$, $z \notin H$ und $C \subseteq H^-$, $C \cap H = \emptyset$, erhält man mit $\delta \in (c^T y, c^T z)$.