b) Für $x \in C$ gilt

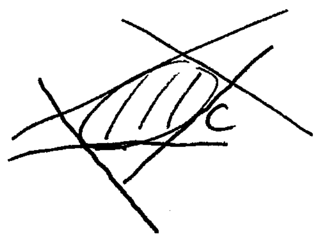
$$c^T x \leq \delta \iff (z-y)^T x \leq (z-y)^T y$$
$$\iff (z-y)^T (x-y) \leq 0$$

Dies gilt nach Lemma 3. $\square$

<u>Bemerkung 6</u>: Die im Beweis konstruierte Hyperebene enthält $y$ und ist also Stützhyperebene von $C$. Eine strikte Trennhyperebene von $\{z\}$ und $C$, also mit $z \in H^+$, $z \notin H$ und $C \subseteq H^-$, $C \cap H = \emptyset$, erhält man mit $\delta \in (c^T y, c^T z)$.

<u>Korollar 7</u>: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$C = \bigcap_{H \text{ Stützhyperebene von } C} H^-$$




<u>Beweis</u>: „$\subseteq$": Klar.

„$\supseteq$": Bemerke, dass für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A \supseteq B \iff \mathbb{R}^n \setminus A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B.$$

Sei also $z \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Dann ex. nach Satz 5 (& Bem 6) eine Stützhyperebene von $C$, die $\{z\}$ und $C$ trennt. Also ist $z \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{H \text{ Stützhypeb. von } C} H^-$ $\square$

**Def 8:** Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Polyeder*, falls es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$
gilt.

**Bemerkungen:**
- Ein Polyeder ist also die Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen, somit die Menge der zulässigen Lösungen eines linearen Programms.
- Ein Polyeder ist darstellbar als Durchschnitt *endlich vieler* Halbräume, im Kontrast zu allg. konvexen Mengen, siehe Korollar 7.
- Wir werden noch untersuchen, was das Verhältnis zwischen Polytopen (siehe Def. 1.1e)) und Polyedern ist. Beobachte aber, dass Polyeder unbeschränkt sein können.

**Satz 9:** Sei $K \neq \emptyset$ ein abgeschlossener konvexer Kegel im $\mathbb{R}^n$ und sei $z \notin K$. Dann ex. ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $c^T z > 0$ und $c^T x \leq 0$ für alle $x \in K$, d.h. $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = 0\}$ ist Trennhyperebene von $\{z\}$ und $K$.

<u>Beweis</u>: Setze wieder $c = z - y$ mit $y = \Pi_K(z)$.

<u>Beh</u>: $c^T y = 0$

<u>Bew</u>: Ang. $c^T y \neq 0$ (also insb. $y \neq 0$)

<u>Fall 1</u>: $c^T y > 0$. Es ist $(1+\varepsilon) y \in K$ für bel. $\varepsilon > 0$. Außerdem:

$$\|(1+\varepsilon)y - z\|^2 = \|y - z + \varepsilon y\|^2$$
$$= \|y-z\|^2 + 2\varepsilon (y-z)^T y + \varepsilon^2 \|y\|^2$$

Dann ist

$$2\varepsilon (y-z)^T y + \varepsilon^2 \|y\|^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(-c)^T y + \varepsilon \|y\|^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon < \frac{2c^T y}{\|y\|^2}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von $\|y-z\|^2$ (siehe Lemma 3).

<u>Fall 2</u>: $c^T y < 0$. Genauso, mit $(1-\varepsilon) y \in K$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{-2c^T y}{\|y\|^2}\right)$. //

Nun ist $c^T z > 0 \Leftrightarrow c^T(z-y) > 0 \Leftrightarrow c^T c > 0$ ✓

und für $x \in K$:

$$c^T x \leq 0 \Leftrightarrow c^T(x-y) \leq 0 \Leftrightarrow (z-y)^T(x-y) \leq 0 \checkmark$$

(Lemma 3)

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Die konstruierte Hyperebene ist eine Stützhyperebene von $K$.

**Satz 10:** Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq \emptyset$. Dann gibt es für jeden Randpunkt $y \in \partial C$ von $C$ einen Punkt $z \notin C$ mit $\Pi_C(z) = y$.

**Beweis:** Sei $y \in \partial C$. Wir können oE annehmen, dass $C$ beschränkt ist (andernfalls ersetze $C$ durch $C \cap B_y$, wobei $B_y$ eine (sehr) große Kugel um $y$ ist).

Dann ex. eine Kugel $B$ mit $C \subseteq B$ und $C \cap \partial B = \emptyset$.

Konstruiere nun $z \in \partial B$ mit $\Pi_C(z) = y$:

Sei $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $y_i \in \mathbb{R}^n \setminus C$ und $\|y_i - y\| \leq \frac{1}{i}$, d.h. insb. $\lim_{i \to \infty} y_i = y$. Da $\Pi_C$ eine Kontraktion ist (Kor. 4), gilt:

$$\|y - \Pi_C(y_i)\| = \|\Pi_C(y) - \Pi_C(y_i)\| \leq \|y - y_i\| \leq \frac{1}{i}.$$

Betrachte nun die Gerade durch $y$ und $\Pi_C(y_i)$ (falls $y = \Pi_C(y_i)$ ist, sind wir fertig). Diese Gerade schneidet $\partial B$, und mindestens einer der beiden Schnittpunkte $z_i$ erfüllt $\Pi_C(z_i) = \Pi_C(y_i)$.

Da $\partial B$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(z_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \to \infty} z_{i_j} = z \in \partial B$.

Weil $\Pi_C$ stetig ist, gilt dann

$$y = \Pi_C(y) = \Pi_C(\lim_{j \to \infty} y_{i_j}) = \lim_{j \to \infty} \Pi_C(y_{i_j}) = \lim_{j \to \infty} \Pi_C(z_{i_j})$$
$$= \Pi_C(\lim_{j \to \infty} z_{i_j}) = \Pi_C(z).$$

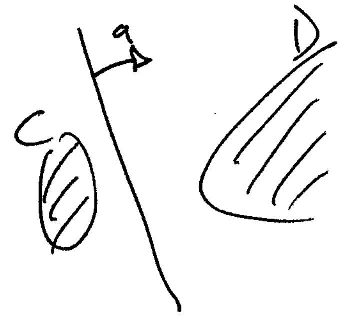
$\square$

Korollar 11: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und konvex, $C \neq 0$, und sei $x \in \partial C$. Dann ex. eine Stützhyperebene $H$ von $C$ mit $x \in H$.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 10 und (dem Beweis von) Satz 5. □

Satz 12: Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere konvexe Mengen mit $C \cap D = \emptyset$. Dann ex. ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\sup_{x \in C} a^T x \leq \inf_{x \in D} a^T x .$$




Beweis: Betrachte die (konvexe) Menge

$$C - D := \{ c - d : c \in C, d \in D \}.$$

Nach Vor. ist $0 \notin C - D$.

Falls $0 \notin \overline{C-D}$, verwende $\pi_{\overline{C-D}}(0)$ wie im Beweis von Satz 5 zur Def. von $a$, d.h. $a^T(c-d) \leq 0$ für alle $c \in C, d \in D$.

Falls $0 \in \overline{C-D}$, dann ist $0 \in \partial \overline{C-D}$ und nach Satz 10 finden wir $a \notin \overline{C-D}$ mit $\pi_{\overline{C-D}}(a) = 0$. Dann ist $(a-0)^T(c-d-0) \leq 0$ nach Lemma 3.

□

# Kapitel V: Polyedertheorie

Die Menge der zulässigen Lösungen eines linearen Programms, $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, ist ein Polyeder (siehe Def. IV.2.8)

## §1 Extrempunkte und Ecken

**Def. 1:** Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $z \in C$ heißt <u>Extrempunkt</u> von $C$, falls für alle $x, y \in C$ mit $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, $\alpha \in (0,1)$ immer $x = y = z$ gilt.
Die Menge aller Extrempunkte von $C$ wird mit $\mathrm{ext}(C)$ bezeichnet.

**Beispiel 2:**

a)  5 Extrempunkte

b) 

unendlich viele Extrempunkte

**Def. 3:** Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder.
a) Die Extrempunkte von $P$ heißen <u>Ecken</u>.