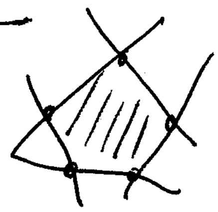
Kapitel V: Polyedertheorie

Die Menge der zulässigen Lösunge eines linearen Programms, $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, ist ein Polyeder (siehe Def. IV.2.8)

§1 Extrempunkte und Ecken

Def. 1: Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $z \in C$ heißt <u>Extrempunkt</u> von C, falls für alle $x, y \in C$ mit $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, $\alpha \in (0,1)$ immer $x = y = z$ gilt.
Die Menge aller Extrempunkte von C wird mit $\operatorname{ext}(C)$ bezeichnet.

Beispiel 2:

a)  5 Extrempunkte

b)  unendlich viele Extrempunkte

Def. 3: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ein Polyeder.

a) Die Extrempunkte von P heißen <u>Ecken</u>.

b) Für $z \in P$ bezeichne mit A_z die Teilmatrix von A, die genau die Zeilen a_i^T enthält, für welche $a_i^T z = b_i$ gilt (die „<u>aktiven Ungleichungen</u>" an z).
Der Vektor b_z bezeichnet die entsprechenden Einträge von b.

Satz 4: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $z \in P$.
Dann gilt: z ist Ecke von $P \Leftrightarrow \operatorname{rang} A_z = n$.

Beweis: „$\Rightarrow$" Angenommen $\operatorname{rang} A_z < n$. Dann ex. ein $c \neq 0$ mit $A_z c = 0$. Da für alle Zeilen a_j^T von A, die nicht in A_z sind, $a_j^T z < b_j$ gilt, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$a_j^T(z + \delta c) \leq b_j \quad \text{und} \quad a_j^T(z - \delta c) \leq b_j.$$

Also $A(z+\delta c) \leq b$ und $A(z - \delta c) \leq b$ und somit $z + \delta c,\ z - \delta c \in P$.
Da außerdem $z = \frac{1}{2}(z+\delta c) + \frac{1}{2}(z - \delta c)$, ist z keine Ecke.

„$\Leftarrow$" Angenommen z kann geschrieben werden als $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ mit $x, y \in P$, $\alpha \in (0,1)$.
Für eine Zeile a_i^T von A_z gilt

$$b_i = a_i^T z = a_i^T(\alpha x + (1-\alpha) y) = \alpha a_i^T x + (1-\alpha) a_i^T y$$
$$\leq \alpha b_i + (1-\alpha) b_i = b_i.$$

Also muss $a_i^T x = a_i^T y = b_i$ gelten, für alle Zeilen von A_z. Da $\operatorname{rang} A_z = n$, ist das System $A_z w = b_z$ eindeutig lösbar. Also muss $x = y = z$ sein und z ist eine Ecke. $\square$

Korollar 5: Ein Polyeder hat endlich viele Ecken.

Beweis: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann höchstens $\binom{m}{n}$ Teilmatrizen A_Z mit $\operatorname{rang} A_Z = n$ haben. Somit hat das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ höchstens $\binom{m}{n}$ Ecken. □

Satz 6: (Minkowski, Krein-Milman)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge. Dann gilt
$$C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C)).$$

Beweis: „$\supseteq$": klar.

„$\subseteq$": Induktion über $\dim C$.

Sei $x \in C$.

$\dim C = -1$: Dann ist $C = \emptyset$, d.h. x ex. nicht. ✓

$\dim C = 0$: Dann ist $C = \{x\} = \operatorname{ext}(C) = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))$. ✓

$\dim C > 0$: Fall 1: $x \in \partial C$.

Dann ex. nach Korollar IV.2.11 eine Stützhyperebene H an C durch x. Betrachte $F = H \cap C$. Falls $F = C$, identifiziere H mit $\mathbb{R}^{n-1}$ und wiederhole die Konstruktion. Da $\dim C > 0$ ist, finden wir so eine Stützhyperebene, für die $F \neq C$ ist. Nun ist F konvex und kompakt, und $\dim F < \dim C$. Nach I.V. ist also $x \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(F))$, und da $\operatorname{ext}(F) \subseteq \operatorname{ext}(C)$ ist, folgt die Beh.

Fall 2: $x \notin \partial C$. Betrachte eine Gerade durch x. Da C kompakt ist, liegen auf dieser Geraden $y, z \in \partial C$ mit $x \in [y, z]$. Wie in Fall 1 gesehen, gilt $y, z \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$. Somit gilt auch $x \in \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C))$. $\square$

Korollar 7: Sei P ein beschränktes Polyeder. Dann ist P die konvexe Hülle seiner Ecken.
Mit anderen Worten: Ein beschränktes Polyeder ist ein Polytop.

Beweis: Satz 6 und Korollar 5. $\square$

Wir wollen auch die Umkehrung zeigen: Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

Def. 8: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$M^\times = \{ y \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 1 \text{ für alle } x \in M \}$$

die polare Menge zu M (oder das Polare).

Lemma 9: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Für $\alpha > 0$ gilt $(\alpha M)^\times = \frac{1}{\alpha} M^\times$, wobei allgemein $\beta M = \{ \beta x : x \in M \}$ definiert ist.

b) $M \subseteq N \Rightarrow N^\times \subseteq M^\times$

c) $(B_n)^\times = B_n$, wobei $B_n = \{ x \in \mathbb{R}^n : x^T x \leq 1 \}$ die n-dim. Einheitskugel ist.

d) $P = \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_t\} \Rightarrow P^\times = \{ y \in \mathbb{R}^n : x_1^T y \leq 1, \dots, x_t^T y \leq 1 \}$.

<u>Beweis:</u> a) und b): leicht zu überprüfen.

c) „$\subseteq$": Sei $y \in (B_n)^*$. Falls $y = 0$, dann ist $y \in B_n$.

Falls $y \neq 0$, dann ist $y^T \Big(\underbrace{\frac{1}{\|y\|} y}_{\in B_n}\Big) \leq 1$, also

$\frac{\|y\|^2}{\|y\|} \leq 1 \iff \|y\| \leq 1$, das heißt $y \in B_n$.

„$\supseteq$": Sei $x \in B_n$. Dann gilt nach Cauchy-Schwarz:

$x^T y \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für (insb.) jedes $y \in B_n$. Also

$x^T y \leq 1 \cdot 1 = 1$ und somit $x \in (B_n)^*$.

d) „$\subseteq$": Klar, da $\{x_1, \ldots, x_t\} \subseteq P$.

„$\supseteq$": Sei y so, dass $x_1^T y \leq 1, \ldots, x_t^T y \leq 1$, und sei $z \in P$.

Dann ist z eine Konvexkomb. von $x_1, \ldots, x_t$, d.h.

$z = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 1$. Somit ist

$$z^T y = \Big(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i\Big)^T y = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i x_i^T y \leq \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 1,$$

und also $y \in P^*$. $\square$