Beweis: a) und b): leicht zu überprüfen.

c) „$\subseteq$": Sei $y \in (B_n)^*$. Falls $y=0$, dann ist $y \in B_n$.

Falls $y \neq 0$, dann ist $y^T \Big(\underbrace{\frac{1}{\|y\|} y}_{\in B_n}\Big) \leq 1$, also

$\frac{\|y\|^2}{\|y\|} \leq 1 \iff \|y\| \leq 1$, das heißt $y \in B_n$.

„$\supseteq$": Sei $x \in B_n$. Dann gilt nach Cauchy-Schwarz: $x^T y \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für (insb.) jedes $y \in B_n$. Also $x^T y \leq 1 \cdot 1 = 1$ und somit $x \in (B_n)^*$.

d) „$\subseteq$": Klar, da $\{x_1, \dots, x_t\} \subseteq P$.

„$\supseteq$": Sei $y$ so, dass $x_1^T y \leq 1, \dots, x_t^T y \leq 1$, und sei $z \in P$. Dann ist $z$ eine Konvexkomb. von $x_1, \dots, x_t$, d.h. $z = \sum_{i=1}^t \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^t \alpha_i = 1$. Somit ist

$$z^T y = \Big(\sum_{i=1}^t \alpha_i x_i\Big)^T y = \sum_{i=1}^t \alpha_i x_i^T y \leq \sum_{i=1}^t \alpha_i = 1,$$

und also $y \in P^*$. $\square$

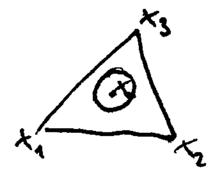
Satz 10: (Weyl)

Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

Beweis: Sei $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Wir können ohne Einschränkung annehmen dass

- $0 \in P$ (durch Translation),
- $\dim P = n$ (durch Einschränkung auf $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_t\}$),
- $x_1, \dots, x_{n+1}$ affin unabh. sind (durch Umnummerierung)

Für den Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{n+1}(x_1 + \dots + x_{n+1})$ der affin unabh. $x_i$ gibt es ein $r > 0$, so dass $x_0 + rB_n \subseteq P$ ist.




Durch Translation können wir $x_0 = 0$ annehmen.

Nach Lemma 9 a)-c) gilt $P^* \subseteq \frac{1}{r}B_n$, also ist $P^*$ beschränkt, und nach Lemma 9 d) ist $P^*$ ein Polyeder. Dann ist $P^*$ nach Korollar 7 ein Polytop, d.h. es ex. $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{R}^n$ mit $P = \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_s\}$.

<u>Beh:</u> $P = \{x \in \mathbb{R}^n : y_1^T x \leq 1, \dots, y_s^T x \leq 1\}$.

<u>Bew:</u> „$\subseteq$": Sei $x \in P$. Dann ist $y_i^T x \leq 1$, weil $y_i \in P^*$.

„$\supseteq$": Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $y_i^T x \leq 1$, $i = 1, \dots, s$. Ang. $x \notin P$.

Dann gäbe es nach Satz IV.2.5 eine Trennhyperebene von $P$ und $\{x\}$, also $c \neq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ mit $c^T x > \delta$, $c^T x' \leq \delta$ für alle $x' \in P$. Da $rB_n \subseteq P$, muss $\delta > 0$ sein. Durch Skalieren von $\delta$ und $c$ können wir $\delta = 1$ wählen.

Dann wäre also $c \in P^*$ und somit gibt es $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$, mit $c = \sum_{i=1}^s \alpha_i y_i$. Also

$$1 < c^T x = \Big(\sum_{i=1}^s \alpha_i y_i\Big)^T x = \sum_{i=1}^s \alpha_i y_i^T x \leq \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1 \quad ⚡$$

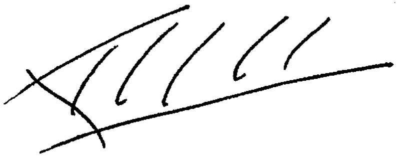
Also ist $x \in P$. $\square$

<u>Korollar 11:</u> (Theorem von Weyl-Minkowski)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$P$ ist ein beschränktes Polyeder $\iff$ $P$ ist ein Polytop.

Was lässt sich über allgemeine Polyeder sagen?

 ?

<u>Satz 12</u> (Weyl-Minkowski für Kegel)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$C$ ist ein endl. erzeugter Kegel (d.h. $C = \operatorname{cone}\{y_1,\dots,y_t\}$)

$$\Longleftrightarrow$$

Es ex. ein $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sodass $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$.

<u>Beweis</u>: Siehe z.B. Kap. 7 in Schrijver: „Theory of linear and integer programming", 1986.

<u>Satz 13</u> (Weyl-Minkowski allgemein)

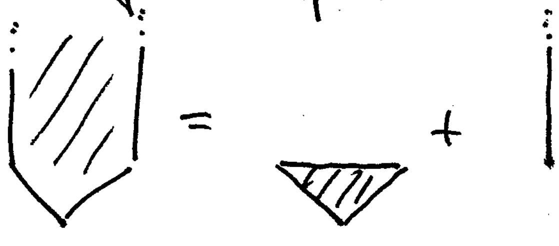
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$P$ ist ein Polyeder $\Longleftrightarrow \exists\, x_1,\dots,x_s, y_1,\dots,y_t \in \mathbb{R}^n$:

$$P = \operatorname{conv}\{x_1,\dots,x_s\} + \operatorname{cone}\{y_1,\dots,y_t\}$$

wobei $A+B = \{a+b : a\in A, b\in B\}$.

<u>Beweis</u>: Siehe ebenfalls Kap. 7 in Schrijver, 1986.

<u>Beispiel 14</u>: P 

## §2 Eliminationsverfahren von Fourier und Motzkin

Algorithmische Grundfrage der Polyedertheorie:
Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, entscheide ob $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\} \neq \emptyset$.

Ähnliche Grundfrage in der linearen Algebra:
Entscheide ob $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \neq \emptyset$.
$\longrightarrow$ Eliminationsverfahren von Gauß.

Hier: ähnliches Vorgehen, aber etwas umständlicher wegen der Ungleichungen.

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \le b$, oder (mathematische) Sicherheit, dass ein solches $x$ nicht existiert.

Idee: Eliminiere nach und nach die Variablen, bis die Frage trivial zu entscheiden ist. D.h. für $x_1$: Finde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times(n-1)}$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, so dass

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \iff \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : \tilde{A}\tilde{x} \le \tilde{b}.$$

Dazu: Multipliziere die Zeilen von $[A|b]$ mit positiven Konstanten, so dass die erste Spalte nur Einträge $0, +1, -1$ hat, und sortiere die Zeilen entsprechend dieser Einträge (für die Übersichtlichkeit). Wir erhalten ein System der Form:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1'^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_r'^T \\ -1 & a_{r+1}'^T \\ \vdots & \vdots \\ -1 & a_{r+s}'^T \\ 0 & a_{r+s+1}'^T \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_m'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ b_m' \end{bmatrix} \qquad (*)$$

mit $a_i'^T \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ (Möglich: $r=0$ und\oder $s=0$)

Dann gilt: $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b'\}$.

Betrachte nun die ersten $r$ Bedingungen:

$$x_1 + a_i'^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq b_i' \iff x_1 \leq b_i' - a_i'^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{für } i=1,\dots,r$$

und genauso die nächsten $s$ Bedingungen:

$$-x_1 + a_{r+j}'^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq b_{r+j}' \iff x_1 \geq a_{r+j}'^T \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - b_{r+j}' \text{ für } j=1,\dots,s.$$

Setze $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, dann erhalten wir zusammen:

$$\sup_{j=1,\dots,s} a_{r+j}'^T \tilde{x} - b_{r+j}' \leq x_1 \leq \inf_{i=1,\dots,r} b_i' - a_i'^T \tilde{x} \qquad (**)$$

(Falls $s=0$, dann ist $\sup = -\infty$; Falls $s=0$, dann ist $\inf = +\infty$)

Also kann man $x_1$ eliminieren und $(*)$ hat eine Lösung genau dann, wenn das folgende System eine Lösung hat:

$$\left|\begin{array}{ll} a'^T_{r+j}\tilde{x} - b'_{r+j} \le b'_i - a'^T_i \tilde{x} & \text{für alle } i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s \\ a'^T_k \tilde{x} \le b'_k & \text{für alle } k=r+s+1,\dots,m \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad (***) \quad \left|\begin{array}{ll} (a'^T_{r+j} + a'^T_i)\tilde{x} \le b'_i + b'_{r+j} & \text{für alle } i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s \\ a'^T_k \tilde{x} \le b'_k & \text{für alle } k=r+s+1,\dots,m \end{array}\right.$$

Das neue System $(***) = (\hat{A}\tilde{x} \le \hat{b})$ hat $r \cdot s + m - (r+s)$ Ungleichungen und $(n-1)$ Variablen.