Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 9 —

Aufgabe 9.1 (7 + 3 = 10 Punkte) Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein beschränktes Polyeder.

a) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass P genau dann leer ist, wenn

$$P^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b + \varepsilon \cdot \mathbf{1}\}$$

leer ist (wobei $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$).

Tipp: Schauen Sie, ob Sie das Lemma von Farkas (oder eine der Varianten) anwenden können.

b) Zeigen Sie, dass P^ε für jedes $\varepsilon > 0$ volldimensional ist, wenn P nicht leer ist.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte) Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ gegeben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -20 & -1 \\ 3 & -10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Schritte des Ellipsoidverfahrens für das Problem $\max\{c^\mathsf{T} x : x \in P\}$ mit $c^\mathsf{T} = (-1, -1)$ und den Startwerten $R = 2$ und $x_0^\mathsf{T} = (0, 0)$.

Aufgabe 9.3 (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix und seien die Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gegeben. Bestimmen Sie das Maximum

$$\max\{c^\mathsf{T} y : y \in \mathcal{E}(A, x)\}$$

und einen Vektor y^*, der das Maximum annimmt.

Aufgabe 9.4 (Präsenzaufgabe) Sei $\mathcal{E}(A, x)$ das Ellipsoid gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und sei $a = (1, 2)$. Bestimmen Sie das Loewner-John-Ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ von $K = \mathcal{E}(A, x) \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : a^\mathsf{T} y \geq a^\mathsf{T} x\}$, und geben Sie die Hauptachsenrichtungen und Längen der Hauptachsen von $\mathcal{E}(K)$ an. Interpretieren Sie die Situation graphisch.

Abgabe: Bis Dienstag, 21.06., 12 Uhr.
Lösungen zu den Aufgaben 9.1, 9.2 und 9.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.