Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 11 —

(Blatt 2 der letzten drei)

Aufgabe 11.1 (10 Punkte) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und sei $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Zirkulation (siehe Aufgabe 4.3).
Zeigen Sie mit Hilfe der Unimodularität der Inzidenzmatrix M von D: Es existiert eine Zirkulation f', so dass f' ganzzahlig ist und für alle $a \in A$ gilt $\lfloor f(a) \rfloor \leq f'(a) \leq \lceil f(a) \rceil$.

Aufgabe 11.2 (3 + 7 = 10 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Schreiben Sie folgende Optimierungsprobleme als lineare ganzzahlige Programme. Lassen sich diese Programme für jedes G zu einem linearen Programm vereinfachen?

a) Minimale Kantenüberdeckung:
$$\rho(G) = \min\{|N| : N \subseteq E \text{ ist eine Kantenüberdeckung}\},$$
wobei $N \subseteq E$ eine Kantenüberdeckung ist, wenn jeder Knoten aus V in mindestens einem Element aus N enthalten ist.

b) Maximale Clique:
$$\omega(G) = \max\{|U| : U \subseteq V \text{ ist eine Clique}\},$$
wobei $U \subseteq V$ eine Clique ist, wenn je zwei Knoten aus U durch eine Kante verbunden sind.

Aufgabe 11.3 (5 + 5 = 10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^n$. Zeigen Sie:

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   - Für jedes $c \in \mathbb{R}^n$, für das $\max\{c^\mathsf{T} x : Ax \leq b\}$ endlich ist, gibt es ein $x^* \in \mathbb{Z}^n$, das optimal ist.
   - Für jedes $c \in \mathbb{Z}^n$, für das $\max\{c^\mathsf{T} x : Ax \leq b\}$ endlich ist, ist der Wert ganzzahlig.

b) Falls $Ax \leq b$ TDI ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, dann ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Aufgabe 11.4 (Präsenzaufgabe) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $l : A \to \mathbb{Z}$ eine Längenfunktion, so dass es keine negativen gerichteten Kreise in D gibt. Seien außerdem $s, t \in V$ so, dass es einen Weg von s nach t in D gibt.

a) Finden Sie ein lineares Programm, das die Länge eines kürzesten s-t-Wegs berechnet. Verwenden Sie hierzu die Inzidenzmatrix M von D.

b) Dualisieren Sie das Programm aus a).

Abgabe: Bis Dienstag, 05.07., 12 Uhr.
Lösungen zu den Aufgaben 11.1, 11.2 und 11.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.