$$\left|\begin{array}{ll} a'^T_{r+j}\tilde{x} - b'_{r+j} \le b'_i - a'^T_i\tilde{x} & \text{für alle } i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s \\ a'^T_k\tilde{x} \le b'_k & \text{für alle } k=r+s+1,\dots,m \end{array}\right.$$

$$\overset{\Longleftrightarrow}{(***)} \left|\begin{array}{ll} (a'^T_{r+j} + a'^T_i)\,\tilde{x} \le b'_i + b'_{r+j} & \text{für alle } i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,s \\ a'^T_k\,\tilde{x} \le b'_k & \text{für alle } k=r+s+1,\dots,m \end{array}\right.$$

Das neue System $(***) = (\hat{A}\tilde{x} \le \hat{b})$ hat $r\cdot s + m - (r+s)$ Ungleichungen und $(n-1)$ Variablen.

<u>Algorithmus 1:</u>

<u>Eingabe</u>: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

<u>Ausgabe</u>: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \le b$ oder „$Ax \le b$ hat keine Lösung".

$A_0 = A$, $b^0 = b$

for $k = 0, \dots, n-2$

  Bringe $(A_k | b^k)$ in die Form $(*)$, mit $a_i \in \mathbb{R}^{n-k-1}$

  Definiere $(A_{k+1} | b^{k+1})$ entsprechend $(***)$.

if $A_{n-1} x_n \le b^{n-1}$ lösbar

  Wähle x_n fest

  for $k = n-1, \dots, 1$

    Wähle x_k fest, so dass $(**)$ erfüllt ist
    (mit x_k anstelle x_1)

  return $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

else

  output „$Ax \le b$ hat keine Lösung".

Bemerkung: (***) entspricht einer Projektion des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ entlang der x_1-Achse.

Satz 2: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder und sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Dann ist $T(P)$ ein Polyeder.

Beweis: Falls T bijektiv ist, dann ist $TP = \{y \in \mathbb{R}^n : AT^{-1}y \leq b\}$ ein Polyeder. Falls T injektiv ist, kann man genauso argumentieren.

Falls $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$, können wir durch eine Drehung annehmen, dass $\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ ist. Verwende nun die obige Bemerkung. $\square$

Anwendung: Lösen von linearen Programmen

$$(LP) \qquad \max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}.$$

Führe zusätzliche Variable λ ein, und die lineare Bedingung $\lambda \leq c^T x$. Der Wert eines maximalen λ für das System linearer Ungleichungen

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ -c^T x + \lambda &\leq 0 \end{aligned}$$

ist dann der Wert von (LP).

$\to$ Finde Lösung (x, λ) mit Algo. 1, mit λ als letzte Variable, wähle sie so groß wie möglich.

§3 Das Lemma von Farkas

Hier betrachten wir ein Lösbarkeitskriterium für ein System von linearen Ungleichungen. Es weist den Weg zur Dualisierung von linearen Programmen.

Satz 1: (Farkas Lemma)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt

$$\exists\, x \geq 0 : Ax = b \iff \nexists\, y \in \mathbb{R}^m : A^T y \geq 0 \text{ und } b^T y < 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Ang. $\exists\, x \geq 0 : Ax = b$ und $\exists\, y \in \mathbb{R}^m$: $A^T y \geq 0$ und $b^T y < 0$. Dann gilt

$$(A^T y)^T x = y^T A x = y^T b < 0, \text{ aber auch}$$

$$\underbrace{(A^T y)^T}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0. \qquad \lightning$$

„$\Leftarrow$" Ang. $\nexists\, x \geq 0 : Ax = b$. Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvektoren von A. Die Annahme lässt sich also so lesen, dass $b \notin \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. Nach Satz 1.12 ist $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$ abgeschlossen, also gibt es nach Satz IV.2.9 eine Trennhyperebene von $\{b\}$ und $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$, also ex. ein $y \neq 0$ mit $y^T b < 0$ und $y^T x \geq 0$ für alle $x \in \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_n\}$. Somit $A^T y \geq 0$. $\square$

Das Lemma von Farkas ist ein Alternativ-Satz:

Entweder: $\exists x \geq 0 : Ax = b$

Oder: $\exists y : A^T y \geq 0,\ b^T y < 0$

Korollar 2 (Variante)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \iff \nexists y \geq 0 : A^T y = 0,\ b^T y < 0.$$

Beweis: Betrachte die Matrix

$$A' = [A \mid -A \mid \underbrace{I_m}_{m \times m\text{-Einheitsmatrix}}] \in \mathbb{R}^{m \times (n+n+m)}$$

und $x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n+m}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_3 \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\exists x' \geq 0 : A'x' = b &\iff \exists x_1, x_2, x_3 \geq 0 : Ax_1 - Ax_2 + x_3 = b \\
&\iff \exists x_1, x_2 \geq 0 : A(x_1 - x_2) \leq b \\
&\iff \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b
\end{aligned}$$

Verwende nun Farkas' Lemma:

$$\begin{aligned}
\exists x' \geq 0 : A'x' = b &\iff \nexists y \in \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ I_m \end{bmatrix} y \geq 0,\ b^T y < 0 \\
&\iff \nexists y \in \mathbb{R}^m : A^T y \geq 0\ \ A^T y \leq 0,\ y \geq 0,\ b^T y < 0 \\
&\iff \nexists y \geq 0 : A^T y = 0,\ b^T y < 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

§4 Lineare Programmierung

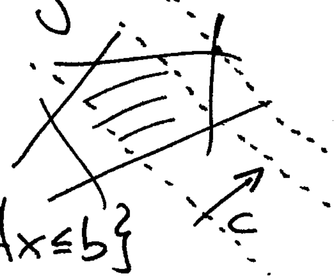
Def. 1: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
Das primale LP ist

$$p^* = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b}} c^T x \qquad \text{(PLP)}$$

und das duale LP ist

$$d^* = \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^m \\ y \geq 0 \\ A^T y = c}} b^T y \qquad \text{(DLP)}$$

Geometrische Interpretation von (PLP): Maximiere die lineare Funktion $x \mapsto c^T x$ über dem Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. D.h. verschiebe die zu c orthogonale Hyperebene so weit in Richtung c, dass der Schnitt gerade noch nichtleer ist.



Satz 2: Falls die Menge $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ der zulässigen Lösungen von (PLP) ein nichtleeres, beschränktes Polyeder ist, dann gibt es eine Ecke z von P, die eine optimale Lösung von (PLP) ist, d.h. $c^T z \geq c^T x$ für alle $x \in P$.

__Beweis:__ Aufgabe 6.2 b). $\square$

(Eventuell sehr langsamer) Algorithmus zur Lösung von (PLP), falls P beschränkt ist: Bestimme alle Ecken $x_1, \ldots, x_t$ von P und finde den Index j mit $c^T x_j \geq c^T x_i$, $i = 1, \ldots, t$.

__Problem:__ t kann sehr groß sein: z.B. beim Würfel

$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n\}$: $2n$ Ungleichungen, aber 2^n Ecken.

__Bessere Algorithmen:__ Fourier-Motzkin (nur etwas besser); Nächstes Kapitel.