Beweis: Aufgabe 6.2 b). $\square$

(Eventuell sehr langsamer) Algorithmus zur Lösung von (PLP), falls P beschränkt ist: Bestimme alle Ecken $x_1, \dots, x_t$ von P und finde den Index j mit $c^T x_j \geq c^T x_i$, $i = 1, \dots, t$.

Problem: t kann sehr groß sein: z.B. beim Würfel

$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \dots, n\}$: $2n$ Ungleichungen, aber 2^n Ecken.

Bessere Algorithmen: Fourier-Motzkin (nur etwas besser); Nächstes Kapitel.

Satz 3 (Dualitätstheorie für lineare Programme)

a) (Schwache Dualität)
Falls x zulässig für (PLP) ist, und y zulässig für (DLP), dann ist $c^T x \leq b^T y$. Insbesondere: $p^* \leq d^*$.

b) (Komplementarität)
Falls x optimal für (PLP) ist, und y optimal für (DLP) dann ist $(Ax - b)^T y = 0$.
Anders gesagt: $y_j \neq 0 \Rightarrow (Ax)_j = b_j$ und $(Ax)_j \neq b_j \Rightarrow y_j = 0$ für $j = 1, \dots, m$.

c) (Optimalitätsbedingung)
Falls x zulässig für (PLP) ist, und y zulässig für (DLP), und $p^* = d^*$, dann sind x, y optimal $\Leftrightarrow$ $(Ax - b)^T y = 0$.

d) (starke Dualität, von Neumann (1947))
Falls (PLP) und (DLP) beide zulässige Lösungen haben, dann gilt $p^* = d^*$ und es gibt optimale Lösungen x und y.

Beweis: a) - c): Alle drei Aussagen lassen sich beweisen durch Betrachtung der Ungleichung

$$b^T y - c^T x \underset{\substack{\text{weil}\\ Ax\le b \text{ und } y\ge 0}}{\geq} \underbrace{(Ax)^T y}_{} - (A^T y)^T x = 0.$$

d) $p^* \leq d^*$: Teil a) ✓

$p^* \geq d^*$: 1. Beh: $\exists x_0: Ax_0 \leq b$ und $c^T x_0 = p^*$.

Bew: Da (DLP) zul. Lösungen hat, folgt aus a): $p^* < \infty$

ZZ: $\exists x_0: Ax_0 \leq b$ und $c^T x_0 \geq p^*$. Angenommen nicht, d.h. $\nexists x_0: \begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} x_0 \leq \begin{bmatrix} b \\ -p^* \end{bmatrix}$. Nach Farkas' Lemma (Korollar 3.2) gibt es dann ein $\begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0$ mit $\left[A^T \mid -c\right]\begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$ und $b^T y - p^* \lambda < 0$. Dann wäre aber

$$\lambda p^* = \sup\{\lambda c^T x : Ax \leq b\} = \sup\{(A^T y)^T x : Ax \leq b\}$$
$$\leq y^T b < \lambda p^*. \quad \lightning$$

//

2. Beh: $\exists y_0 \geq 0: A^T y_0 = c,\ b^T y_0 \leq p^*$.
(Mit $d^* \leq b^T y_0 \leq p^*$ folgt dann Teil (d))

Bew: Angenommen nicht, d.h. $\nexists \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$:

$\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ p^* \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix} \geq 0$. Nach Farkas' Lemma (Satz 3.1) gibt es dann $\begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$: $\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} \geq 0$ und $c^T z + p^* \mu < 0$.

__Fall 1:__ $\mu = 0$. Dann ist also $Az \geq 0$ und $c^T z < 0$. Nach Vor. hat (PLP) eine Lösung x_0, also $Ax_0 \leq b$. Für $\tau \geq 0$ ist dann $A(x_0 - \tau z) \leq b$ und für ausreichend großes τ ist $c^T(x_0 - \tau z) > p^*$. $\lightning$

__Fall 2:__ $\mu > 0$. Dann ist $Az + \mu b \geq 0$, $c^T z + p^* \mu < 0$. Also $A(-\frac{1}{\mu} z) \leq b$ und $c^T(-\frac{1}{\mu} z) > p^*$. $\lightning$ //

$\square$

__Korollar 4:__ $\max\{c^T x : x \geq 0, Ax = b\}$
$= \min\{b^T y : A^T y - c \geq 0, y \in \mathbb{R}^m\}$,
falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht-leer sind.

__Beweis:__ Setze $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$. Dann gilt

$$\max\{c^T x : x \geq 0, Ax = b\} = \max\{c^T x : \tilde{A} x \leq \tilde{b}\}$$
$$= \min\{\tilde{b}^T z : z \geq 0, \tilde{A}^T z = c\} \underset{z = \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right]}{=} \min\{b^T u - b^T v : u, v, w \geq 0, A^T u - A^T v - w = c\}$$
$$\overset{y = u - v}{=} \min\{b^T y : A^T y \geq c\}.$$

$\square$

Def. 5: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Dann heißt
$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \geq 0 \text{ für alle } x \in K\}$$
der zu K duale Kegel.

Lemma 6: $(\mathbb{R}^n_{\geq 0})^* = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Beweis: Für $y \in (\mathbb{R}^n_{\geq 0})^*$ ist $y^T e_i \geq 0$ für $e_i = (0,..,0,1,0,..,0)^T$, $i = 1, \dots, n$, also $y \geq 0$. Umgekehrt ist $x^T y \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. □

Somit können wir (PLP) auch formulieren als
$$p^* = \sup \; c^T x \quad x \in \mathbb{R}^n, \; (b - Ax) \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$$

und (DLP) als
$$d^* = \inf \; b^T y \quad A^T y = c, \; y \in (\mathbb{R}^m_{\geq 0})^*.$$

Dualisierungstheorie für Programme mit linearen Gleichungen und Kegel-Bedingungen: Möglich, und teilweise sehr erfolgreich $\rightarrow$ Semidefinite Optimierung, Innere-Punkte-Methode für konvexe Kegel, etc.

Kapitel VI: Algorithmen für lineare Optimierung

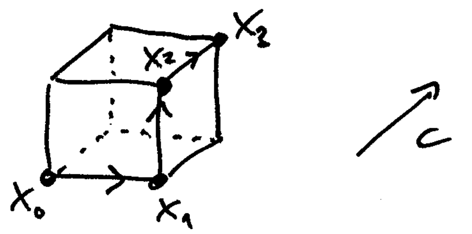
Ziel: Löse das Programm (LP) $p^* = \max\{c^T x : Ax \le b\}$
algorithmisch (und möglichst effizient)

Bislang: • Aufzählen aller Ecken von $P = \{x : Ax \le b\}$
(Satz V.4.2)
• Fourier-Motzkin (Kap. V.2)

§1 Das Simplexverfahren

Wir wissen aus Satz V.4.2 (bzw. Aufgabe 6.2b):
Falls $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ein Polytop (also beschränkt) ist, dann wird p^* an einer Ecke von P angenommen.

Geometrische Idee: Finde eine Abfolge von Ecken $x_0, \dots, x_N \in P$, so dass $c^T x_0 \le c^T x_1 \le \dots \le c^T x_N = p^*$.



Zunächst: Wir nehmen an, dass P mindestens eine Ecke hat, die wir auch kennen.

Später: Überlegen, wie wir solch eine Ecke finden.