Algorithmus 1: (Simplexalgorithmus)

Eingabe: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, x_0 Ecke von $P = \{x : Ax \leq b\}$.

Ausgabe: Ecke x_N von P mit $c^T x_N = p^*$, oder „$p^* = +\infty$".

- Wähle $n \times n$-Teilsystem $A_0 x \leq b_0$ von $A_{x_0} x \leq b_{x_0}$ (also $A_0 x_0 = b_0$) mit $\operatorname{rang}(A_0) = n$.

- Bestimme $u \in \mathbb{R}^m$ mit $c = A^T u$ und $u_i = 0$ falls Zeile a_i^T von A nicht zu A_0 gehört.
  ↳ Berechne $(A_0^{-1})^T c$ und füge Nullen für die Zeilen ein, die nicht in A_0 sind.

Fall 1: $u \geq 0$. Dann ist x_0 optimal, denn:

u ist optimale Lösung des dualen LPs

$$\begin{aligned} &\min b^T y \\ &\quad y \geq 0 \\ &\quad A^T y = c \end{aligned}$$

da gilt:

$$c^T x_0 = (A^T u)^T x_0 = u^T A x_0 \overset{\substack{u_i = 0 \text{ für } a_i^T \text{ nicht in } A_0 \\ \downarrow}}{=} u^T b \geq \min\{b^T y : y \geq 0, A^T y = c\}$$

$$\overset{\substack{\text{schwache Dualität} \\ \downarrow}}{\geq} \max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

Also ist $c^T x_0 = p^*$.

Fall 2: $u \not\geq 0$. Sei i der kleinste Index mit $u_i < 0$.

- Wähle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $a^T y = 0$ für alle Zeilen a^T von A_0 mit $a^T \neq a_i^T$

und $a_i^T y = -1$

↳ y ist die zu a_i^T korrespondierende Spalte von $-A_0^{-1}$.

Fall 2.1: $a^T y \leq 0$ für alle Zeilen a^T von A.

Dann ist $x_0 + \lambda y \in P$ für alle $\lambda \geq 0$.

Außerdem:

$$c^T(x_0 + \lambda y) = c^T x_0 + \lambda c^T y = c^T x_0 + \lambda u^T A y$$
$$= c^T x_0 - \lambda \underbrace{u_i}_{<0} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} +\infty$$

Also ist $p^* = +\infty$.

Fall 2.2: $a^T y > 0$ für eine Zeile a^T von A.

- Setze $\lambda_0 = \max\{\lambda \in \mathbb{R} : x_0 + \lambda y \in P\}$

$$= \min\left\{ \frac{b_j - a_j^T x_0}{a_j^T y} : j = 1, \dots, m,\ a_j^T y > 0 \right\}$$

Sei l der kleinste Index, an dem das Minimum angenommen wird.

- Definiere A_1 = Matrix, die man erhält, wenn man aus A_0 Zeile a_i^T löscht und Zeile a_l^T einfügt.

$$x_1 = x_0 + \lambda_0 y$$

$$b_1 = A_1 x_1$$

- Starte vom Anfang mit A_1, x_1, b_1 anstatt von A_0, x_0, b_0.

Der Algorithmus läuft also so lange, bis entweder $u \geq 0$ oder $\rho^* = +\infty$ ist.

<u>Satz 2:</u> Algorithmus 1 terminiert nach endlich vielen Schritten.

<u>Beweis:</u> Bezeichne die im k-ten Schritt auftretenden Objekte mit $A_k, x_k, b_k, u_k, y_k, \lambda_{0,k}$.

<u>Beh:</u> $c^T x_0 \leq c^T x_1 \leq \dots$ und: $c^T x_k = c^T x_{k+1} \Leftrightarrow x_k = x_{k+1}$.

<u>Bew:</u> Es ist $c^T y_k = u_k^T A y_k = -(u_k)_i > 0$ und also

$$c^T x_{k+1} = c^T (x_k + \lambda_{0,k} y_k) = c^T x_k + \underbrace{\lambda_{0,k}}_{\geq 0} \underbrace{c^T y_k}_{> 0} \geq c^T x_k$$

mit Gleichheit nur für $\lambda_{0,k} = 0$. //

Angenommen der Algorithmus läuft endlos weiter. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k < \ell$ und $A_k = A_\ell$, weil es nur endlich viele Teilmatrizen von A gibt.

Dann ist $x_k = x_\ell$, also $x_k = x_{k+1} = \dots = x_\ell$.

Sei r der größte Index, so dass a_r^T aus A_t genommen wird, für ein $t \in \{k, k+1, \dots, \ell\}$. Sei p ein Schritt, in dem dies passiert.

Weil $A_k = A_\ell$ ist, wird a_r^T in einem Schritt $k \leq q < \ell$

aufgenommen. Es ist also $k \le p, q < \ell$, und für $j > r$ gilt:

(*) $\qquad a_j^T$ kommt in A_p vor $\Leftrightarrow$ a_j^T kommt in A_q vor.

Außerdem ist $u_p^T A y_q = c^T y_q > 0$, also gibt es einen Index j mit $(u_p)_j (a_j^T y_q) > 0$.

<u>Fall 1:</u> a_j^T gehört nicht zu A_p. Aber dann ist $(u_p)_j = 0$. $\lightning$

<u>Fall 2:</u> a_j^T gehört zu A_p.

a) $j > r$: Dann ist wegen (*) $a_j^T y_q = 0$. $\lightning$

b) $j = r$: Dann ist $(u_p)_j < 0$ und $a_j^T y_q > 0$. $\lightning$

c) $j < r$: Dann ist $(u_p)_j \ge 0$ und es gilt:

- Falls a_j^T zu A_q gehört, ist $a_j^T y_q \le 0$ $\lightning$
- Falls a_j^T nicht zu A_q gehört, und $a_j^T y_q > 0$ ist, dann ist $a_j^T x_q < b_j$ nach Wahl von r, aber wegen $x_q = x_p$ wäre a_j^T nicht in A_p. $\lightning$

Also terminiert Algo. 1. $\square$

<u>Noch übrig:</u> Wie finden wir die Startecke x_0?

<u>Nehmen an:</u> (LP) ist von der Form

$$\max\{c^T x : x \ge 0, Ax \le b\}$$