Nach Aufgabe 6.3 b) hat $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\}$ dann eine Ecke, falls $P \neq \emptyset$.

<u>Idee:</u> Neues LP aufstellen, das eine offensichtliche Ecke hat, und dessen optimale Lösung eine Ecke von P liefert.

<u>Neues LP:</u>

$$\min \mathbb{1}^T y \qquad (\mathbb{1} = [1, \dots, 1]^T)$$

$$\begin{bmatrix} A & -I_m \\ -I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0$$
$$y \in \mathbb{R}^m, y \geq 0$$

<u>Offensichtliche Ecke:</u> $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit

$$x = 0$$
$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } b_j \geq 0 \\ -b_j & \text{falls } b_j < 0 \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m.$$

Dann ist $\binom{x}{y} \in P' = \{\binom{x}{y} : Ax - y \leq b, x \geq 0, y \geq 0\}$ und $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}_{\binom{x}{y}} = n+m.$

Jetzt können wir den Simplexalgorithmus mit dieser Startecke anwenden, und finden eine optimale Ecke $\binom{x^*}{y^*}$ von $P'$.

<u>Fall 1</u>: $\mathbb{1}^T y^* > 0$. Dann gilt:

$\exists_j : y_j^* > 0$ und $[Ax^* - y^*]_j \leq b_j$. Da wir minimieren, heißt das: $\nexists x \geq 0 : Ax \leq b$.

Also ist das ursprüngliche LP nicht lösbar.

<u>Fall 2</u>: $\mathbb{1}^T y^* = 0$. Dann ist also $y^* = 0$ und somit

$$Ax^* \leq b, \; x^* \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}_{x^*} = n,$$

also ist $x^*$ eine Ecke von $P$.

## <u>Zur Effizienz des Simplex-Algorithmus:</u>

+ sehr schnell bei vielen praxisrelevanten Eingaben
+ Sehr gute Implementationen erhältlich (CPLEX, gurobi)
- Klee-Minty-Würfel (1972) ist ein Beispiel, dass der Algorithmus (mit der Wahl der nächsten Ecke wie hier beschrieben) exponentiell viele Schritte brauchen kann.
+ Spielman-Teng (2004): Falls an der Eingabe auf zufällige Weise leicht „gewackelt" wird, dann ist der Algorithmus polynomiell. („smoothed analysis")

o Offen: Ist der maximale Abstand zwischen zwei Ecken immer polynomiell in $n, m$?

## §2 Grundlegendes zu Ellipsoiden

<u>Def. 1</u>: a) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt <u>positiv definit</u>, falls $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. D. h. $A$ ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A$ positiv sind.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathcal{E}(A,x) = \{y \in \mathbb{R}^n : (y-x)^T A^{-1} (y-x) \leq 1\}$$

das durch $A$ und $x$ definierte <u>Ellipsoid</u>.

<u>Beispiel 2</u>:
$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r^2 I_n, 0) &= \{y \in \mathbb{R}^n : y^T \tfrac{1}{r^2} I y \leq 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \tfrac{1}{r^2} \|y\|^2 \leq 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq r\} = r \cdot B_n,\end{aligned}$$

wobei $B_n = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}$ die $n$-dimensionale Einheitskugel ist.

<u>Eigenschaften</u>:

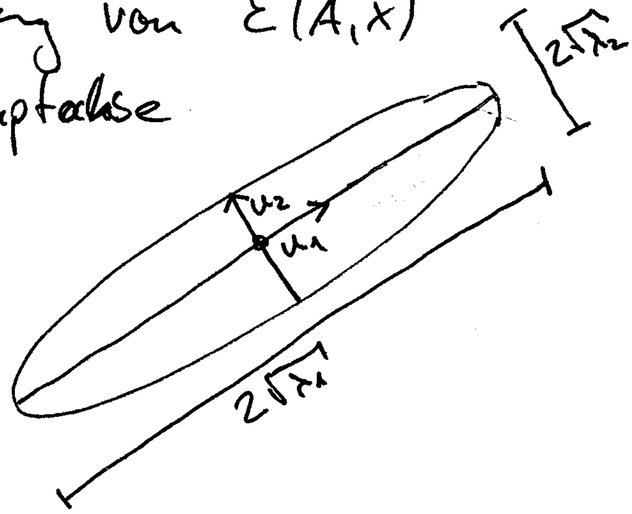
Hauptachsentransformation / Spektralzerlegung:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T, \quad \text{wobei}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von $A$ sind, und $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis aus den entsprechenden Eigenvektoren.

$\longrightarrow$ $u_i$ : Hauptachsenrichtung von $\mathcal{E}(A,x)$

$2\sqrt{\lambda_i}$ : Länge der Hauptachse




<u>Def 3:</u> Sei $A$ positiv definit mit Spektralzerlegung $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$. Dann ist die <u>Wurzel von A</u> definiert als $\sqrt{A} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\, u_i u_i^T$.

<u>Satz 4:</u> Es gilt

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}(A,x)) = \sqrt{\det A} \cdot \mathrm{vol}\, B_n,$$

wobei $\mathrm{vol}\, B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ ist, mit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (für $2x \in \mathbb{N}$).

<u>Beweis:</u> Da das Volumen durch Translationen nicht verändert wird, gilt $\mathrm{vol}(\mathcal{E}(A,x)) = \mathrm{vol}(\mathcal{E}(A,0))$. $\mathcal{E}(A,0)$ ist das Bild von $B_n$ unter der linearen Abbildung $\sqrt{A}$, d.h. $\mathcal{E}(A,0) = \sqrt{A} \cdot B_n$.

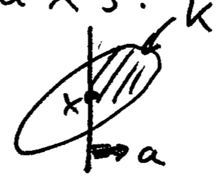
Also:

$$\mathrm{vol}\,\mathcal{E}(A,0) = \int_{\mathcal{E}(A,0)} 1\,dx = \int_{\sqrt{A}B_n} 1\,dx$$

Transformations-Formel

$$= \det\sqrt{A}\cdot\int_{B_n} 1\,dx = \sqrt{\det A}\,\mathrm{vol}\,B_n. \qquad \square$$

<u>Satz 5:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pos. def., $x \in \mathbb{R}^n$, und $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und Setze $K = \mathcal{E}(A,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x\}$.




Dann ex. ein eindeutiges Ellipsoid $\mathcal{E}(K)$ mit $K \subseteq \mathcal{E}(K)$ mit minimalem Volumen.

Es ist $\mathcal{E}(K) = \mathcal{E}(A', x')$ mit

$$A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1} b b^T\right), \quad x' = x + \frac{1}{n+1} b,$$

wobei $b = \frac{1}{\sqrt{a^T A a}} A a$.

Außerdem ist $\frac{\mathrm{vol}\,\mathcal{E}(A',x')}{\mathrm{vol}\,\mathcal{E}(A,x)} < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} < 1$.

<u>Beweis:</u> Die Existenz des eindeutigen Ellipsoids $\mathcal{E}(K)$ erhalten wir, wenn wir uns für $\mathcal{E}(A,x) = B_n$ davon überzeugen, dass dies gilt. Dann können wir Satz 4 verwenden.
Das Nachrechnen ist elementar, aber fehleranfällig. $\square$

<u>Def. 6:</u> $\mathcal{E}(K)$ heißt das <u>Loewner-John-Ellipsoid</u> von $K$.