Bemerkung: $\mathcal{E}(K)$ ist eindeutig für jede konvexe, kompakte Menge $K \neq \emptyset$. Der Beweis hierzu ist allerdings umfangreicher, und es ist auch nicht so kanonisch, wie $\mathcal{E}(K)$ aufzustellen ist.

§2 Trennen und Optimieren

Voraussetzung:

$\mathcal{K}$ ist eine Menge von konvexen und kompakten Mengen im $\mathbb{R}^n$, und für jedes $K \in \mathcal{K}$ kennen wir $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$ mit

$$x_0 + rB_n \subseteq K \subseteq x_0 + RB_n.$$

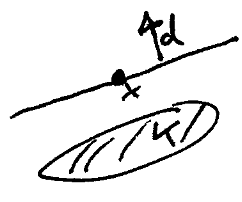
Für (LP): $\mathcal{K} = \{P \subseteq \mathbb{R}^n : P \text{ beschr. Polyeder}, \dim P = n\}$. Es ist möglich, für $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ anhand von A, b festzustellen, ob $\dim P = n$ ist, und x_0, r, R zu finden.

Def. 1: Das Trennungsproblem ist wie folgt definiert:

Eingabe: $K \in \mathcal{K}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Ausgabe: „$x \in K$" oder $d \in \mathbb{R}^n$ mit $d^T x > \max_{y \in K} d^T y$.

Im zweiten Fall trennt also die Hyperebene $H = \{y \in \mathbb{R}^n : d^T y = d^T x\}$ den Punkt x von K.



Beispiel 2: Falls $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein beschränktes Polyeder ist, lässt sich das Trennungsproblem wie folgt lösen:

Für das gegebene $x \in \mathbb{R}^n$ teste, ob $a_i^T x \leq b_i$, $i = 1, \dots, m$.

Falls ja: „$x \in K$".

Falls nicht: Dann ex. ein i mit $a_i^T x > b_i$. Setze $d = a_i$.

Def. 3: Das Optimierungsproblem ist wie folgt definiert:

Eingabe: $c \in \mathbb{R}^n$ mit $\|c\| = 1$, $\varepsilon > 0$, $K \in \mathcal{K}$.

Ausgabe: $x \in K$ mit $c^T x \geq \max_{y \in K} c^T y - \varepsilon$.

Beispiel 4: Falls $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein beschränktes Polyeder ist, dann löst das Optimierungsproblem approximativ (LP).

Satz 5 (Grötschel, Lovász, Schrijver 1981):

Das Optimierungsproblem lässt sich durch N-faches Lösen des Trennungsproblems lösen, wobei N so gewählt ist, dass

$$2 \frac{R^2}{r} e^{-\frac{N}{2(n+1)n}} \leq \varepsilon$$

gilt.

Der Beweis von Satz 5 basiert darauf, die Ellipsoid-methode zu analysieren:

<u>Algorithmus 6</u> (Ellipsoidmethode, Khachiyan 1979)

<u>Eingabe:</u> $c \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathcal{K}$, x_0, R (mit $x_0 + R B_n \supseteq K$),
$N \in \mathbb{N}$.

<u>Ausgabe:</u> $x \in K$ mit $c^T x = \max\{c^T x_j : x_j \in K,\ j = 0, \dots, N-1\}$

$E_0 = \mathcal{E}(R^2 I, x_0)$

for $k = 0, \dots, N-1$

Löse Trennungsproblem für x_k, x_k Mittelpunkt von E_k.

if $x_k \in K$:

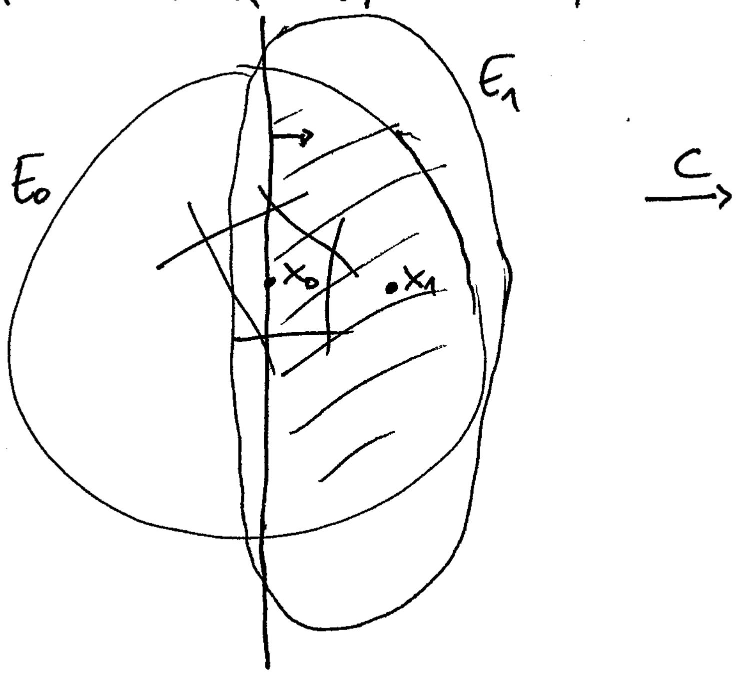
$a = c$

else

$a = -d$

Loewner-John-Ellipsoid

$E_{k+1} = \mathcal{E}(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : a^T y \geq a^T x_k\})$



Lemma 7: Sei

$$\xi_{k+1} = \max\{c^T x_j : 0 \le j \le k,\ x_j \in K\}$$

und

$$K_k = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge \xi_k\}.$$

Dann ist $K_k \subseteq E_k$.

Beweis: Induktion über k:

$k=1$: $\xi_1 = c^T x_0$, $K_1 = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \ge c^T x_0\}$

Da $x_0 \in K$ ist, setzen wir $a = c$ und also

$$E_1 = \mathcal{E}(E_0 \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge c^T x_0\})$$
$$\supseteq \mathcal{E}(\underbrace{K \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge c^T x_0\}}_{= K_1})$$
$$\supseteq K_1.$$

$k \to k+1$:

Fall 1: $x_k \in K$. Dann setzen wir $a = c$ und

$$E_{k+1} = \mathcal{E}(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge c^T x_k\})$$
$$\supseteq \mathcal{E}(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge \xi_{k+1}\})$$
$$\overset{\text{I.V.}}{\supseteq} \mathcal{E}(\underbrace{K_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \ge \xi_{k+1}\}}_{= K_{k+1}})$$
$$\supseteq K_{k+1}.$$

Fall 2: $x_k \notin K$. Dann ist $a = -d$ und $K_{k+1} = K_k$.

Außerdem:

$$E_{k+1} = \mathcal{E}\left(E_k \cap \{y \in \mathbb{R}^n : d^T y \leq d^T x_k\}\right)$$
$$\supseteq \mathcal{E}(E_k \cap K)$$
$$\overset{\text{I.V.}}{\supseteq} \mathcal{E}(K_k)$$
$$\supseteq K_k = K_{k+1}. \qquad \square$$

Lemma 8: Sei $k \in \mathbb{N}$ und j mit $0 \leq j < k$ ein Index so dass $\xi_k = c^T x_j$. Dann gilt

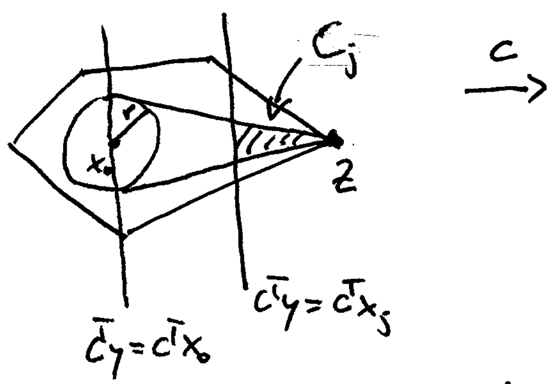
$$c^T x_j \geq \max_{y \in K} c^T y - 2\frac{R^2}{r} e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}.$$

Bemerkung: Dies zeigt dann auch Satz 5.

Beweis (Lemma 8): Sei $z \in K$ eine optimale Lösung, d.h.

$$c^T z = \max_{y \in K} c^T y.$$

Idee des Beweises in Dimension 2:



$\rightsquigarrow$ Stelle Verbindung zwischen $\mathrm{Vol}(C_j)$ und $c^T z - c^T x_j$ her, verwende Schranke an $\mathrm{Vol}(C_j)$.

Betrachte also zunächst den runden Kegelstumpf C mit Spitze z und Basis

$(x_0 + rB_n) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y = c^T x_0\}$.

Sei dann $C_j = C \cap \{y \in \mathbb{R}^n : c^T y \geq c^T x_j\}$. Dann gilt:

$$\mathrm{Vol}(C_j) = \frac{r^{n-1}\,\mathrm{Vol}(B_{n-1})}{n}(c^T z - c^T x_0)\left(\frac{c^T z - c^T x_j}{c^T z - c^T x_0}\right)^n$$

$$\Longleftrightarrow (c^T z - c^T x_j)^n = \mathrm{Vol}(C_j) \cdot \frac{n\,(c^T z - c^T x_0)^{n-1}}{r^{n-1}\,\mathrm{Vol}(B_{n-1})}.$$

Nach Lemma 7 ist $C_j \subseteq K_k \subseteq E_k$ und somit

$$\mathrm{Vol}(C_j) \leq \mathrm{Vol}(E_k) \underset{\text{Satz 1.5}}{\leq} \mathrm{Vol}(E_0) \cdot \left(e^{-\frac{1}{2(n+1)}}\right)^k$$

$$\leq R^n\,\mathrm{Vol}(B_n) \cdot e^{-\frac{k}{2(n+1)}}.$$

Außerdem ist

$$|c^T z - c^T x_0| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \underbrace{\|c\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|z - x_0\|}_{\leq R} \leq R.$$

Zusammen:

$$(c^T z - c^T x_j)^n \leq R^n\,\mathrm{Vol}(B_n)\cdot e^{-\frac{k}{2(n+1)}} \cdot \frac{n \cdot R^{n-1}}{r^{n-1}\,\mathrm{Vol}(B_{n-1})} \cdot \underbrace{\frac{R}{r}}_{\geq 1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad c^T z - c^T x_j \leq \underbrace{\left(\frac{n\,\mathrm{Vol}(B_n)}{\mathrm{Vol}(B_{n-1})}\right)^{1/n}}_{\leq 2} \cdot \frac{R^2}{r}\, e^{-\frac{k}{2(n+1)n}}$$

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Zur Berechnung des Ellipsoide werden Wurzeln gezogen, daher haben wir angenommen, mit unendlicher Genauigkeit rechnen zu können.

<u>Aber</u>: Der Algorithmus kann leicht verändert werden, so dass dieses Problem nicht auftritt. Dafür wird die Analyse komplizierter.