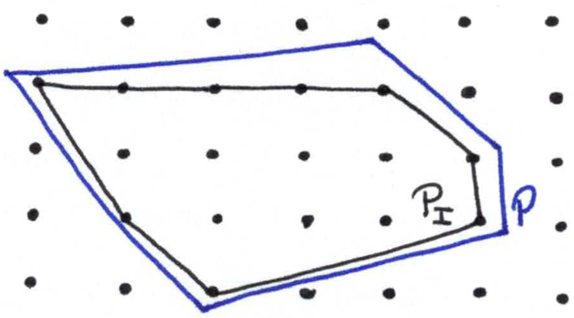
Teil C - Einführung in die ganzzahlige Optimierung

Def. 1 Ein ganzzahliges lineares Programm (ILP = IP = integer linear program) ist von der Form

$$\max c^T x$$
$$x \in \mathbb{Z}^n \quad (x \text{ ganzzahlig})$$
$$Ax \le b$$

Geometrisch: Maximiere lineare Funktion $x \mapsto c^T x$ über die ganzzahligen Punkte in Polyeder:

$\mathbb{Z}^n \cap P$, $P = \{x : Ax \le b\}$.



$P_I = \operatorname{conv}(\mathbb{Z}^n \cap P)$

Beispiel 2 $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

Die Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ ist definiert als

$$A_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \in e \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die Matchingzahl von G gegeben durch ein ILP:

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\}$$
$$= \max\Big\{ \sum_{e \in E} x_e : x_e \in \mathbb{Z} \quad \forall e \in E$$
$$x_e \ge 0 \quad \forall e \in E$$
$$\sum_{e : e \ni v} x_e \le 1 \quad \forall v \in V \Big\}$$

$$= \max \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T x : x \in \mathbb{Z}^E, \ x \geq 0, \ Ax \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kapitel VII - Vollständig unimodulare Matrizen

§1 Grundlegende Eigenschaften

Def. 1 Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *ganzzahlig*, falls für alle $c \in \mathbb{R}^n$, für die $\sup\{c^T x : x \in P\}$ endlich ist, das Maximum an einem ganzzahligen Vektor angenommen wird.

Klar: Falls P ganzzahlig ist und $\sup\{c^T x : x \in P\} \neq \pm\infty$, dann ist

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\} = \max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

D.h. die Ganzzahligkeitsbedingung kann weggelassen werden.

Passiert in seltenen, aber wichtigen Spezialfällen.
Im Allgemeinen kann $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ effizient, in polynomieller Zeit gelöst werden, $\max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n, Ax \leq b\}$ dagegen höchstwahrscheinlich nicht.

($\rightarrow$ äquivalent zum $P \neq NP$ Problem)

Def. 2 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt <u>vollständig unimodular</u> (VU), falls jeder ihrer Minoren (d.h. Determinanten quadratischer Teilmatrizen) gleich $0, -1$ oder gleich $+1$ ist. Insbesondere ist jeder Eintrag $A_{ij} \in \{0, -1, +1\}$.

Satz 3: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Sei z eine Ecke des Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Dann ist z ganzzahlig, d.h. $z \in \mathbb{Z}^n$.

Bew.: Die Teilmatrix A_z hat nach Satz V.1.4. vollen Rang n. Also enthält A_z eine Teilmatrix A' der Größe $n \times n$ vom Rang n. OBdA sei A' die obere linke Teilmatrix von A. Setze $b' = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt $A'z = b'$.
Nach der Cramerschen Regel ist $z_i = \dfrac{\det A'_i}{\det A'}$, wobei A'_i aus A' hervorgeht, indem man die i-te Spalte durch den Vektor b' ersetzt. Da nach Voraussetzung $|\det A'| = 1$ und weil $A'_i \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ ist, folgt $z_i \in \mathbb{Z}$. ⊠

Satz 4 Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Bew.: Sei $c \in \mathbb{R}^n$, so dass $\sup\{c^T x : x \in P\}$ endlich ist.
Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax^* \leq b$ und $c^T x^* = \sup\{c^T x : x \in P\}$.
Wähle $d', d'' \in \mathbb{Z}^n$ mit $d' \leq x^* \leq d''$.

Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, d' \leq x \leq d''\}$ ein beschränktes Polyeder, also nach dem Theorem von Minkowski-Weyl ein Polytop.

Nach Satz V.4.2. wird $\max\{c^T x : x \in Q\}$ an einer Ecke $\tilde{x}$ von Q angenommen. Insbesondere, da $x^* \in Q$ und $\tilde{x} \in P$ ist, gilt $c^T\tilde{x} = c^T x^*$. Nun ist $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^n$, weil

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -d' \\ d'' \end{bmatrix} \right\} \text{ ist und weil } \begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix} \text{ VU ist}$$

und weil wir somit Satz 3 anwenden können. $\boxtimes$

Korollar 5: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Dann haben die beiden linearen Programme

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{b^T y : A^T y = c, \ y \geq 0\}$$

ganzzahlige Lösungen, falls die Optima endlich sind.

Bew.: Folgt aus Satz 4, weil die Matrix

$$\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ -I \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{(2n+m) \times m} \text{ VU ist. (Warum?)} \qquad \boxtimes$$

§2 Vollständig unimodulare Matrizen & bipartite Graphen

Satz 1 Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt:

G ist bipartit $\Leftrightarrow$ Inzidenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ von G ist VU

Bew. „$\Rightarrow$": Sei B eine $t \times t$ Teilmatrix von A.

Zeige: $\det B \in \{-1, 0, +1\}$ per Induktion nach t.