Dann ist $Q=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\le b,\ d'\le x\le d''\}$ ein beschränktes Polyeder, also nach dem Theorem von Minkowski-Weyl ein Polytop.

Nach Satz V.4.2. wird $\max\{c^Tx : x\in Q\}$ an einer Ecke $\tilde{x}$ von Q angenommen. Insbesondere, da $x^*\in Q$ und $\tilde{x}\in P$ ist, gilt $c^T\tilde{x}=c^Tx^*$. Nun ist $\tilde{x}\in\mathbb{Z}^n$, weil

$$Q=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} b \\ -d' \\ d'' \end{bmatrix}\right\}$$ ist und weil $\begin{bmatrix} A \\ -I \\ I \end{bmatrix}$ VU ist

und weil wir somit Satz 3 anwenden können. $\boxtimes$

<u>Korollar 5</u>: Sei $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ VU, $b\in\mathbb{Z}^m$, $c\in\mathbb{Z}^n$. Dann haben die beiden linearen Programme

$$\max\{c^Tx : Ax\le b\}=\min\{b^Ty : A^Ty=c,\ y\ge 0\}$$

ganzzahlige Lösungen, falls die Optima endlich sind.

<u>Bew.</u>: Folgt aus Satz 4, weil die Matrix

$$\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ -I \end{bmatrix}\in\mathbb{Z}^{(2n+m)\times m}$$ VU ist. (Warum?) $\boxtimes$

<u>§2 Vollständig unimodulare Matrizen & bipartite Graphen</u>

<u>Satz 1</u> Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt:

G ist bipartit $\Leftrightarrow$ Inzidenzmatrix $A\in\mathbb{R}^{V\times E}$ von G ist VU

<u>Bew.</u> „$\Rightarrow$": Sei B eine $t\times t$ Teilmatrix von A.

<u>Zeige</u>: $\det B\in\{-1,0,+1\}$ per Induktion nach t.

$t=1$: ✓

$t>1$: 1. Fall: B enthält eine Nullspalte. Dann $\det B = 0$

2. Fall: B enthält eine Spalte, die genau eine 1 enthält.

Dann ist $|\det B| = |\det \begin{bmatrix} 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}|$ mit

$b \in \mathbb{R}^{t-1}$, $B' \in \mathbb{R}^{(t-1)\times(t-1)}$.

Nach I.V. ist $\det B' \in \{-1, 0, +1\}$, also auch

$\det B \in \{-1, 0, +1\}$, weil $|\det B| = |\det B'|$.

3. Fall: Jede Spalte von B enthält genau zwei Einsen.

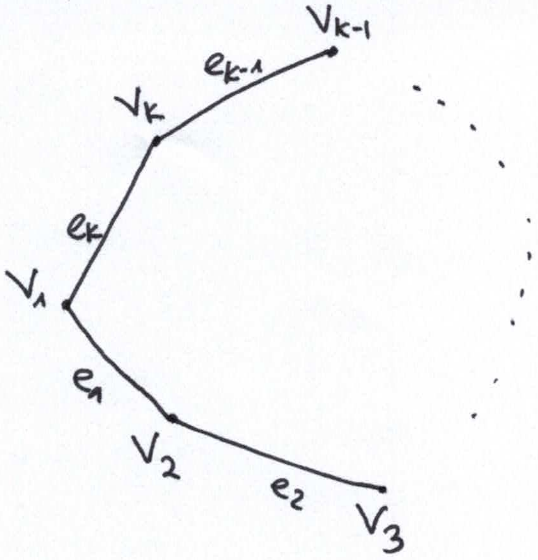
Da G bipartit ist, kann man (nach evtl. Permutation der Zeilen) B als $B = \begin{bmatrix} B' \\ B'' \end{bmatrix}$ schreiben, wobei jede Spalte von B' und jede Spalte von B'' genau eine Eins enthält.

Aufaddieren aller Zeilen von B' ergibt den Vektor $(1, \ldots, 1)$, genauso wie das Aufaddieren aller Zeilen von B''. D.h. die Zeilen von B sind linear abhängig: $\det B = 0$.

„$\Leftarrow$": Sei A vu und angenommen der Graph G ist nicht bipartit. Dann enthält G einen Kreis ungerader Länge mit Knoten $v_1, \ldots, v_k$ und Kanten $e_1, \ldots, e_k$.

Die zugehörige Teilmatrix von A (mit Zeilen $v_1, \ldots, v_k$ und Spalten $e_1, \ldots, e_k$) ist von der Form:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_{k-1} & e_k \\
\hline
v_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
v_2 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
v_{k-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
v_k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1
\end{array}
$$



Entwickle die Determinante dieser Matrix nach der k-ten Spalte: Dann sieht man, dass die Determinante gleich

$$(+1)\cdot 1 + (+1)\cdot 1 = 2 \text{ ist (} k \text{ ungerade!).}$$

Also ist A nicht VU. $\boxtimes$

<u>Korollar 2</u>: (Matching-Theorem von König, siehe Satz II.3.2)
Sei $G=(V,E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $\nu(G)=\tau(G)$.

<u>Bew.</u>:
$$
\begin{aligned}
\nu(G) &= \max\ \{|M| : M \subseteq E \text{ Matching in } G\} \\
&= \max\ \{\sum_{e\in E} x_e : x_e \geq 0\ \forall e\in E,\ x_e \in \mathbb{Z},\ \sum_{e:e\ni v} x_e \leq 1\ \forall v\in V\} \\
&= \max\ \{\mathbb{1}^T x : x \in \mathbb{Z}^E,\ x \geq 0,\ Ax \leq \mathbb{1}\} \\
&\overset{A \text{ VU, Satz 1.5}}{=} \max\ \{\mathbb{1}^T x : x\in\mathbb{R}^E,\ x\geq 0,\ Ax \leq \mathbb{1}\} \\
&= \max\ \{\mathbb{1}^T x : x\in\mathbb{R}^E,\ \begin{pmatrix} A \\ -I\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ 0\end{pmatrix}\} \\
&\overset{\text{LP Dualität}}{=} \min\ \{\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ 0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y}\end{pmatrix} : y\in\mathbb{R}^V,\ \tilde{y}\in\mathbb{R}^E,\ y\geq 0,\ \tilde{y}\geq 0, \\
&\qquad \begin{pmatrix} A \\ -I\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \mathbb{1}^T\}
\end{aligned}
$$

$$= \min\{\mathbb{1}^T y : y \in \mathbb{R}^V, \tilde{y} \in \mathbb{R}^E, y \geq 0, \tilde{y} \geq 0, A^T y = \mathbb{1}^T + \tilde{y}\}$$

$$= \min\{\mathbb{1}^T y : y \in \mathbb{R}^V, y \geq 0, A^T y \geq \mathbb{1}\}$$

A^T VU, Satz 1.5

$$= \min\{\mathbb{1}^T y : y \in \mathbb{Z}^V, y \geq 0, A^T y \geq \mathbb{1}\}$$

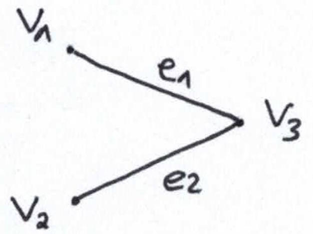
$$= \min\Big\{\sum_{v \in V} y_v : y_v \in \mathbb{Z}, y_v \geq 0 \ \forall v \in V, \ y_u + y_v \geq 1 \ \forall \{u,v\} \in E\Big\}$$

$$= \tau(G)$$

$\uparrow$ $y \in \mathbb{Z}^V$, Minimum wird an einem Vektor angenommen, der nur 0/1-Komponenten enthält.

Dann ist $y_v = 1 \Leftrightarrow v$ ist Knoten in einer minimalen Knotenüberdeckung. $\boxtimes$

<u>Beispiel 3</u>

G: 

Knotenüberdeckungen: $\{v_3\}$, $\{v_1, v_2\}$

$\rightarrow \tau(G) = 1$

Matchings: $\{e_1\}$, $\{e_2\}$ $\rightarrow \nu(G) = 1$

$$\nu(G) = \max\{x_1 + x_2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1\} \quad (*)$$

$$= \max\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^T x : x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^2, \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}}_{=A} x \leq \mathbb{1}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^T x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix} x \leq \mathbb{1}\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^T x : x \in \mathbb{R}^{2 \,\hat{=}\, E}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}^T y : y \in \mathbb{R}^{5 \,\hat{=}\, V+E}, y \geq 0, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}^T y = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^T y : y \in \mathbb{R}^{3 \,\hat{=}\, V}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{2 \,\hat{=}\, E}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}^T y = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \tilde{y}, y \geq 0, \tilde{y} \geq 0\right\}$$

$= \min\{\mathbb{1}^T y : y \in \mathbb{R}^3, y \geq 0, A^T y \geq \mathbb{1}\}$

$= \min\{y_1+y_2+y_3 : y_1 \in \mathbb{Z}, y_2 \in \mathbb{Z}, y_3 \in \mathbb{Z}, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0,$
$y_1+y_3 \geq 1, y_2+y_3 \geq 1\}$ (**)

Optimale Lösungen für (*): $x = \binom{1}{0}$, $x = \binom{0}{1}$

" " " (**): $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \nu(G) = 1$ und $\tau(G) = 1$

Def. 4 Sei $G=(V,E)$. Das Matchingpolytop von G ist die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren von Matchings in G:

$M(G) = \operatorname{conv}\{\chi^M : M \subseteq E \text{ Matching in } G\} \subseteq \mathbb{R}^E.$

Korollar 5 Sei $G=(V,E)$ bipartit. Dann ist

$$M(G) = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, Ax \leq \mathbb{1}\},$$

wobei A die Inzidenzmatrix von G ist.

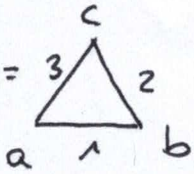
Bew.: „$\subseteq$": ✓

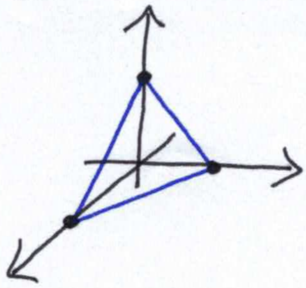
„$\supseteq$": Die rechte Seite $Q = \{x : x \geq 0, Ax \leq \mathbb{1}\}$ ist beschränkt. Also nach Minkowski-Weyl ein Polytop.

Somit ist Q die konvexe Hülle seiner Ecken.

Da A VU ist, sind nach Satz 1.5 alle Ecken von Q ganzzahlig. Jeder ganzzahlige Vektor in Q ist charakteristischer Vektor eines Matchings in G. $\boxtimes$

Beispiel 6

$G =$ 



$$M(G) = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

aber $\{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, Ax \leq 1\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\end{array} x \leq 1 \right\} \ni \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

Da $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \notin M(G)$ gilt $M(G) \neq \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, Ax \leq 1\}$.

Korollar 5 gilt nur für <u>bipartite</u> Graphen.

<u>Korollar 7</u> (Theorem von Egerváry (1931))

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $\omega : E \to \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Gewichtsfunktion. Dann gilt:

$$\nu_\omega(G) = \min\left\{ \sum y_v : y \in \mathbb{Z}^V, y \geq 0, y_u + y_v \geq \omega(\{u,v\}) \ \forall \{u,v\} \in E \right\}$$

<u>Bew.</u>: Weil $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ Inzidenzmatrix von G VU ist, gilt

$$\max\{\omega^T x : x \in \mathbb{Z}^E, x \geq 0, Ax \leq 1\}$$

$$\overset{A \text{ VU, Satz 1.5}}{=} \max\{\omega^T x : x \in \mathbb{R}^E, x \geq 0, Ax \leq 1\}$$

$$\overset{\text{LP Dualität}}{=} \min\{1^T y : y \in \mathbb{R}^V, y \geq 0, A^T y \geq \omega\}$$

$$\overset{A^T \text{ VU, Satz 1.5}}{=} \min\{1^T y : y \in \mathbb{Z}^V, y \geq 0, A^T y \geq \omega\}. \qquad \boxtimes$$