§3 Vollständig unimodulare Matrizen und gerichtete Graphen

<u>Def. 1:</u> Sei $D=(V,A)$ ein gerichteter Graph. Die <u>Inzidenzmatrix</u> $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ von D ist definiert als

$$M_{v,a} = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \in \delta^{in}(v) \quad \circ \xrightarrow{a} \circ\, v \\ -1 & \text{falls } a \in \delta^{out}(v) \quad v \circ \xrightarrow{a} \circ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede Spalte von M enthält also genau eine $+1$ und genau eine -1.

<u>Satz 2:</u> Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen ist VU.

<u>Beweis:</u> Sei $B \in \mathbb{R}^{t \times t}$ eine Teilmatrix der Inzidenzmatrix M. Zeige per Induktion nach t, dass $\det B \in \{-1, 0, +1\}$.

<u>$t=1$:</u> ✓

<u>$t>1$:</u> <u>Fall 1:</u> B hat eine Nullspalte. Dann ist $\det B = 0$. ✓

<u>Fall 2:</u> B hat eine Spalte, die genau ein Element $\neq 0$ enthält.

Dann ist $|\det B| = \left|\det \begin{bmatrix} 1 & b^T \\ 0 & B' \end{bmatrix}\right| = |\det B'| \overset{\text{I.V.}}{\in} \{0,1\}$,

wobei $b \in \mathbb{R}^{t-1}$, $B' \in \mathbb{R}^{t-1 \times t-1}$.

<u>Fall 3:</u> Jede Spalte von B enthält genau zwei Elemente $\neq 0$.

Dann ergibt das Aufaddieren sämtlicher Zeilen von B den Nullvektor. Also ist $\det B = 0$.

$\square$

Korollar 3 (Max-Flow-Min-Cut, siehe Satz III.1.4)

Sei $D=(V,A)$ ein gerichteter Graph, $s,t\in V$, $c: A\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Dann gilt:

$$\max\{\text{value}(f) : f: A\to\mathbb{R}_{\geq 0} \text{ s-t-Fluss}, f\leq c\}$$
$$=\min\{c(\delta^{out}(U)) : U\subseteq V, s\in U, t\in V\setminus U\}$$

und falls $c: A\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$, dann ex. ein $f: A\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ s-t-Fluss, $f\leq c$ mit $\text{value}(f)=\max$.

Beweis: $\max\leq\min$: Klar.

$\max\geq\min$: Sei $M\in\mathbb{R}^{V\times A}$ die Inzidenzmatrix von D. Sei M' die Matrix, die durch Streichen der zu s und t gehörenden Zeilen aus M entsteht. Dann ist

$f\in\mathbb{R}^A$ ein s-t-Fluss $\Longleftrightarrow$ $M'f=0$.

Sei $w^T\in\mathbb{R}^A$ die zu t gehörende Zeile von M. Dann ist

$w^Tf=\text{value}(f)$.

Also:

$$\max\{\text{value}(f) : f: A\to\mathbb{R}_{\geq 0} \text{ s-t-Fluss}, f\leq c\}$$
$$=\max\{w^Tf : 0\leq f\leq c, M'f=0\}$$
$$=\max\left\{w^Tf : \begin{bmatrix} I \\ M' \\ -M' \\ -I\end{bmatrix} f\leq\begin{bmatrix} c\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$
$$\overset{\text{LP-Dualität}}{=}\min\left\{c^Ty : y,z_1,z_2,z_3\geq 0, \left[I\ (M')^T\ (-M')^T\ I\right]\begin{bmatrix} y\\z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=w\right\}$$

$$= \min\{c^T y : y, z_1, z_2, z_3 \geq 0,\ y + (M')^T(z_1 - z_2) + z_3 = w\}$$

$$= \min\{c^T y : y \geq 0,\ z \in \mathbb{R}^{V \setminus \{s,t\}},\ y + (M')^T z \geq w\}$$

$$= \min\left\{c^T y : y \in \mathbb{R}^A, z \in \mathbb{R}^{V \setminus \{s,t\}},\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & (M')^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}\right\}$$

Nun ist $\begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$ ganzzahlig und nach Satz 2 ist $\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & (M')^T \end{bmatrix}$ VU. Also wird nach Satz 1.3 das Minimum am einem ganzzahligen Vektor y^*, z^* angenommen.

Erweitere z^* zu $z^* \in \mathbb{R}^V$ mit $z^*_t = -1$, $z^*_s = 0$. Dann gilt $y^* + M^T z^* \geq 0$ (Nachrechnen!)

Definiere $U = \{v \in V : z^*_v \geq 0\}$. Somit $s \in U$, $t \in V \setminus U$.

<u>Beh</u>: $c(\delta^{out}(U)) \leq c^T y^*$ ($=$ max value(f))

<u>Bew</u>: Reicht z.z.: Falls $a \in \delta^{out}(U)$, dann ist $y^*_a \geq 1$.

Sei also $a = (u,v) \in \delta^{out}(U)$. Dann gilt

$z^*_u \geq 0$ und $z^*_v \leq -1$ (da $z^* \in \mathbb{Z}^V$)

Wegen $[y^* + M^T z^*]_a \geq 0$ gilt $y^*_a + z^*_v - z^*_u \geq 0$,

also $y^*_a \geq z^*_u - z^*_v \geq 1$. // $\square$

§ 4 Charakterisierung von VU Matrizen

Satz 1: (Hoffman, Kruskal, 1956)

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Dann gilt:

$$A \text{ ist VU} \iff \forall b \in \mathbb{Z}^m: P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\} \text{ ist ganzzahlig.}$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Satz 1.4.

„$\Leftarrow$": Sei A' eine reguläre $k \times k$-Teilmatrix von A.

Zu zeigen: $|\det A'| = 1$.

Durch Umsortieren können wir annehmen, dass A' die obere linke $k \times k$-Teilmatrix von A ist.

Betrachte $B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, die aus den ersten k und letzten $m-k$ Spalten von $[A | I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$ besteht:

$$[A | I] = \left[\begin{array}{c|c} A' & * \\ \hline * & * \end{array} \quad \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & I_{m-k} \end{array}\right]$$

B

Dann ist $|\det B| = |\det A'|$.

Ziel: Zeige $B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$.

[Dann gilt: $\det B^{-1} \in \mathbb{Z}$ & $\det B \cdot \det B^{-1} = 1 \Rightarrow |\det B| = 1$]

Sei $i \in \{1, \dots, m\}$. <u>Zeige</u>: Die i-te Spalte von B^{-1} ist ganzzahlig.

Wähle $y \in \mathbb{Z}^m$ mit $y + B^{-1} e_i \geq 0$ und setze $z = y + B^{-1} e_i$.

Dann ist $Bz = By + e_i \in \mathbb{Z}^m$. Setze $b = Bz$.

Sei nun $z' \in \mathbb{Z}^{n+m}$ der Vektor, der wie folgt aus z entsteht:

$$z'_j = z_j \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$
$$z'_{n+k+j} = z_{k+j} \quad \text{für } j = 1, \dots, m-k$$
$$z'_j = 0 \quad \text{sonst.}$$

D.h. füge in z zwischen den ersten k und letzten $m-k$ Komponenten $n-k+k$ Nullen ein.

Dann gilt nach Konstruktion

$$(*) \quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} z' = Bz = b.$$

Da $z' \geq 0$ ist, liegt der Vektor z'', der aus den ersten n Komponenten von z' besteht, im Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax \leq b\}$, d.h. es gilt $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} z'' \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$.

Die ersten k und letzten $n-k$ Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt. Da die entsprechenden Zeilen von $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind (A' ist regulär), ist z'' eine Ecke von P. Also ist nach Voraussetzung $z'' \in \mathbb{Z}^n$.

Auf den ersten n Komponenten ist z' gleich z''.
Die letzten m Komponenten von z' sind nach $(*)$ gleich $b - Az'' \in \mathbb{Z}^m$.
Somit ist $z \in \mathbb{Z}^m$ und damit auch die i-te Spalte von B^{-1}: $\quad B^{-1} e_i = z - y \in \mathbb{Z}^m$. $\square$