



Universität zu Köln  
Mathematisches Institut  
Prof. Dr. F. Vallentin  
J. Rolfes, M. Sc.

## Mathematische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Sommersemester 2016

### — Übungsblatt 11 —

**Aufgabe 11.1.** Sei  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ . Betrachte die Punkte  $w_1, \dots, w_{n+1}$ , wobei für  $i \leq n$ ,  $w_i = e_i$  die euklidischen Standardvektoren bezeichne und  $w_{n+1} = 0$  den Nullvektor. Zeige, dass falls eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  existiert, für die gilt:  $(1-\epsilon)\|w_i - w_j\| \leq \|f(w_i) - f(w_j)\| \leq (1+\epsilon)\|w_i - w_j\|$ , es Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in S^{k-1}$  gibt für die  $|\langle v_i, v_j \rangle| \leq 16\epsilon$  für alle  $i \neq j$  gilt.

**Aufgabe 11.2.** Sei  $A \in S^n$  für die  $a_{ii} = 1$  und  $|a_{ij}| \leq n^{-\frac{1}{2}}$  für alle  $i \neq j$  gilt. Zeige, dass  $\text{rang}(A) \geq \frac{n}{2}$  gilt.

**Aufgabe 11.3.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\text{rang}(A) = d$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so, dass  $b_{ij} = a_{ij}^k$  gilt. Zeige, dass  $\text{rang}(B) \leq \binom{k+d}{k}$  gilt.

**Aufgabe 11.4.** Seien  $w_i \in \mathbb{R}^n$  Vektoren, welche die Voraussetzungen aus Aufgabe 11.1 erfüllen. Zusätzlich gelte  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{16}$  für das zugehörige  $\epsilon > 0$ . Zeige mit Hilfe der vorigen Aufgaben, dass

$$k = \Omega \left( \frac{1}{\epsilon^2 \log(\epsilon^{-1})} \log n \right) \text{ gilt.}$$

**Abgabe:** Am Dienstag, den 12. Juli, um 10 Uhr am Anfang der Vorlesung „Mathematische Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung“. Bitte Namen, Matrikelnummer und Gruppennummer auf die Abgabe schreiben.