Bew.: Ausrechnen:

$$h(a) \Pr[X \geq a] = \int_a^\infty h(a)\, d\mu(x) \leq \int_a^\infty h(x)\, d\mu(x) \leq \int_{-\infty}^\infty h(x)\, d\mu(x) = E[h(X)].$$

$\boxtimes$

Lemma X Zufallsvariable in $\mathbb{R}$ mit $E[X] = 0$.
Ang. $E[e^{uX}] \leq e^{Cu^2}$ für eine Konstante C und alle $u \in (0, u_0]$. Dann gilt

$$\Pr[X \geq \lambda] \leq e^{-\frac{1}{4C}\lambda^2} \quad \text{für alle } \lambda \in (0, 2Cu_0].$$

Bew. Sei $u \in (0, u_0]$ und $\lambda \in (0, 2Cu_0]$. Dann wende die Markov Ungleichung mit $h(X) = e^{uX}$ an:

$$\Pr[X \geq \lambda] \leq E[e^{uX}] / e^{u\lambda} \leq e^{Cu^2 - u\lambda} \leq e^{-\frac{1}{4C}\lambda^2}$$

für $\lambda \leq 2Cu_0$ ist $u = \dfrac{\lambda}{2C} \leq u_0$

und $C \dfrac{\lambda^2}{4C^2} - \dfrac{\lambda^2}{2C} = -\dfrac{1}{4C}\lambda^2$.

$\boxtimes$

Bew.: (des Satzes)

Da T linear ist, können wir annehmen, dass $x \in \mathbb{R}^N$ normalisiert ist. D.h. $\|x\| = 1$.

Definiere die Zufallsvariablen

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N} z_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, M.$$

Es ist $z_{ij} \sim N(0,1)$, also $Y_i \sim N(0, \sum_{j=1}^{N} x_j^2) = N(0,1)$.

Es gilt

$$\|Tx\|^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} Y_i^2$$

Also

$$E[\|Tx\|^2] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} E[Y_i^2] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Var}[Y_i] = 1.$$

Definiere die Zufallsvariable

$$W = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^{M} (Y_i^2 - 1).$$

Sublemma Sei $X \sim N(0,1)$. Dann gibt es Konstanten $C, u_0 > 0$, so dass

$$E[e^{u(X^2-1)}] \le e^{Cu^2} \quad \text{und} \quad E[e^{u(1-X^2)}] \le e^{Cu^2}$$

für $u \in (0, u_0]$.

Bew.:

$$E[e^{u(X^2-1)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x^2-1)} e^{-x^2/2} \, dx$$

$$= \frac{1}{e^u \sqrt{1-2u}} = e^{-u - \frac{1}{2} \ln(1-2u)}$$

für $u < \frac{1}{2}$.

$$= e^{u^2 + \frac{4}{3}u^3 + 2u^4 + \dots} \quad \text{(Taylor-Entwicklung)}$$

$$\leq e^{Cu^2}$$ für genügend großes C und genügend kleines u.

Gleiche Rechnung für $E[e^{u(1-X^2)}]$. $\boxtimes$

Also:

$$E[e^{uW}] = E[e^{u \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i^2 - 1)}]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E[e^{u \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_i^2 - 1)}]$$

$$\leq \left(e^{C\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)^n$$

$$= e^{Cu^2}$$ für geeignete C und u.

Genauso:

$$E[e^{-uW}] \leq e^{Cu^2}.$$

Nach dem Lemma ist

$$\Pr[\,|W| \geq \lambda\,] \leq 2e^{-C\lambda^2} \quad \text{für geeignete } C \text{ und } \lambda.$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{M}} W$ genauso verteilt wie $\|Tx\|^2 - 1$.

Somit

$$\Pr[\,(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|\,]$$

$$= \Pr[\,(1-\varepsilon)^2\|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 \leq (1+\varepsilon)^2\|x\|^2\,]$$

$$\geq \Pr[\,(1-\varepsilon) \leq \|Tx\|^2 \leq 1+\varepsilon\,]$$

$$= \Pr[\,|W| \leq \varepsilon\sqrt{M}\,]$$

$$\leq 1 - 2e^{-C\varepsilon^2 M} \quad \text{für geeignetes } C$$

$\boxtimes$