<u>Frage</u>: Welche K kann man für den "Kernel-Trick" verwenden?

<u>Def.</u>: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge.
Eine stetige Abbildung $K : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt ein <u>positiv definiter Kern</u>, falls

(a) K symmetrisch ist, d.h. $K(v,w) = K(w,v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.

(b) $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \dots, x_N \in V$: $\left[K(x_i, x_j) \right]_{1 \le i,j \le N}$ ist eine positiv semidefinite Matrix.

<u>Satz</u> (Mercer, 1909)
Sei K ein positiv definiter Kern. Dieser definiert einen Integraloperator

$$T_K : L^2(V) \to L^2(V)$$

durch

$$T_K f(x) = \int_V K(x,y) f(y)\, dy.$$

T_K besitzt Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geq 0$ mit zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in L^2(V)$.

Dann gilt

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(y) ,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig und absolut ist.

<u>D.h.</u> ein positiv definiter Kern K liefert die Einbettung

$$\varphi(x) = (\sqrt{\lambda_1} \varphi_1(x), \sqrt{\lambda_2} \varphi_2(x), \ldots)$$

<u>Bew.:</u> $\rightarrow$ Spektraltheorie kompakter Operatoren.
(VL Funktionalanalysis)
Buch: Riesz, Sz.-Nagy – Functional Analysis (Klassiker)

<u>Satz</u> Die radiale Basisfkt. ~~$K(x_i, x_j)$~~ =

$$K(x,y) = \exp(-\tfrac{1}{2} \|x-y\|^2 / \sigma^2)$$

ist ein positiv definiter Kern.

<u>Bew.:</u> K stetig, symmetrisch: ✓

K positiv definit:

Können oBdA $K(x,y) = \exp(-\|x-y\|^2)$ betrachten.

Zerlege:

$$K(x,y) = \exp(-x^T x)\exp(2x^T y)\exp(-y^T y).$$

Aufgrund der Reihenentwicklung ist $\exp(2x^T y)$ ein positiv definiter Kern:

$$\underbrace{\exp(2x^T y)}_{=K'(x,y).} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}(x^T y)^i.$$

Nach Mercer gibt es $\lambda_k \geq 0$, $\varphi_k \in L^2(V)$:

$$K'(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x)\varphi_k(y).$$

Schreibe nun

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_k}\exp(-x^T x)\varphi_k(x)\right)\left(\sqrt{\lambda_k}\exp(-y^T y)\varphi_k(y)\right).$$

Diese Zerlegung zeigt, dass K ein positiv definiter Kern ist. $\boxtimes$