Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. F. von Heymann
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2016

— Aufgabenblatt 12 —

(Blatt 3 der letzten drei)

Aufgabe 12.1 (10 Punkte) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ der achsenparallele Würfel mit Kantenlänge 1, also

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix} \right\}.$$

Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{Q}^m$, so dass $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \le b\}$ und $Ax \le b$ TDI ist. Beweisen Sie (z.B. durch Konstruktion, mit Sätzen der Vorlesung), dass $Ax \le b$ TDI ist.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte) Sei P ein rationales Polyeder und F eine inklusions-minimale Seite von P. Definiere

$$C_F = \left\{ c \in \mathbb{R}^n : F \subseteq \left\{ x \in P : c^\mathsf{T} x = \max\{c^\mathsf{T} y : y \in P\} \right\} \right\},$$

also ist C_F die Menge der Zielfunktionen, deren Maximum von allen Elementen von F angenommen wird.
Zeigen Sie: C_F ist ein rationaler, endlich erzeugter Kegel, d.h. es existieren $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{Q}^n$ mit $C_F = \operatorname{cone}\{v_1, \dots, v_N\}$.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix}-3/8\\ 11/4\\ 9/16\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Chvátal-Gomory Abschluss P' von $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \le b\}$.
Tipp: Machen Sie sich eine Skizze von P, um "wichtige" Schnitthyperebenen zu identifizieren.

Aufgabe 12.4 (Präsenzaufgabe)

a) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polyeder und $F_1, \dots, F_s$ die inklusions-minimalen Seiten von P. Zeigen Sie:

   Es gibt für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ eine Matrix A_i und einen Vektor b_i, so dass $F_i = \{x \in \mathbb{R}^n : A_i x = b_i\}$ und so, dass $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A_i x \le b_i,\ i = 1, \dots, s\}$ gilt.

b) Sei $Ax \le b$ TDI und sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$. Zeigen Sie: Falls $a^\mathsf{T} x \le \beta$ von allen $x \in P$ erfüllt wird, mit $a \in \mathbb{Q}^n$ und $\beta \in \mathbb{Q}$, dann ist das System $\binom{A}{a^\mathsf{T}} x \le \binom{b}{\beta}$ ebenfalls TDI.

Abgabe: Bis Dienstag, 12.07., 12 Uhr.
Lösungen zu den Aufgaben 12.1, 12.2 und 12.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.