§5 TDI-Systeme und Hilbertbasen

Haben gesehen: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ VU, $b \in \mathbb{Z}^m$ impliziert:
$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ist ganzzahlig.

<u>Aber</u>: Nicht jedes ganzzahlige Polyeder hat eine solche Darstellung.

<u>Also</u>: Weitere Darstellungen suchen, die Ganzzahligkeit zertifizieren.

<u>Def 1</u>: Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>rational</u>, falls es $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ gibt mit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Bemerke, dass wir dann $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ wählen können.

<u>Exkurs: Ganzzahlige Lösungen in rationalen Gleichungssystemen.</u>

<u>Satz 2</u>: Sei $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann gilt:

Es ex. $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax = b$

$\Leftrightarrow$

Für alle $y \in \mathbb{Q}^m$: $y^T A \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow y^T b \in \mathbb{Z}$.

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$": Falls $y^T A, x \in \mathbb{Z}^n$ und $Ax = b$, dann gilt $y^T b = y^T A x \in \mathbb{Z}$.

„$\Leftarrow$": <u>Beh</u>: $Ax=b$ hat eine Lösung (nicht notwendig ganzzahlig) genau dann, wenn für alle $y\in\mathbb{R}^m$ gilt: $y^TA=0 \Rightarrow y^Tb=0$.

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$": Klar: $y^Tb = y^TAx = 0$.

„$\Leftarrow$": Betrachte den linearen Unterraum

$L=\{z\in\mathbb{R}^m : Ax=z \text{ für ein } x\in\mathbb{R}^n\} = \operatorname{im}(A)$

Dann ex. eine Matrix C mit $L=\operatorname{Ker}(C)$, also $L=\{z\in\mathbb{R}^m : Cz=0\}$, und insb. $C\cdot A=0$. Zeilenweise betrachtet gilt also nach Vor. $C\cdot b=0$, also $b\in L$. Also ex. $x\in\mathbb{R}^n$ mit $Ax=b$.

Gelte also für $y\in\mathbb{Q}^m$, dass $y^Tb\in\mathbb{Z}$ falls $y^TA\in\mathbb{Z}^n$. Hätte $Ax=b$ gar keine Lösung, gäbe es $y\in\mathbb{Q}^m$ mit $y^TA=0$ und $y^Tb=\frac{1}{2}$ (durch Skalieren), im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also hat $Ax=b$ eine Lösung und wir können annehmen, dass die Zeilen von A lin. unabh. sind.

Wir können durch Vertauschen und ganzzahliges Addieren von Spalten erreichen, dass A die Form $[B|0]$ hat, mit $\det B\neq 0$. Diese Operationen haben keinen Einfluss auf die Aussagen des Satzes.

Da nun $B^{-1}A = B^{-1}[B|0] = [I|0]$ ganzzahlig ist, muss $B^{-1}b \in \mathbb{Z}^m$ gelten. Setze also $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist $Ax = b$ und $x \in \mathbb{Z}^n$. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Satz 2 kann als eine Art ganzzahlige Version des Lemma von Farkas verstanden werden.

<u>Def. 3</u>: Sei P ein Polyeder und H eine Stützhyperebene von P (also $P \subseteq H^-$, $P \cap H \neq \emptyset$). Dann heißt $F = P \cap H$ eine <u>Seite</u> von P.

<u>Lemma 4</u>: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Dann gilt:

$$F \subseteq P \text{ ist eine Seite}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$F \neq \emptyset \text{ und } F = \{x \in P : A'x = b'\} \text{ für ein Teil-System } A'x \leq b' \text{ von } Ax \leq b.$$

<u>Beweis</u>: „$\Leftarrow$": Sei c^T die Summe der Zeilen von A'. Dann ist F die Menge der Punkte in P, die $c^T x$ maximieren. Sei δ dieses Maximum, dann ist $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ die gesuchte Hyperebene.

„$\Rightarrow$": Sei $F = \{x \in P : c^T x = \delta\}$ für ein $c \in \mathbb{R}^n$ und $\delta = \max\{c^T x : x \in P\} < \infty$. Dann ist

$$\delta = \max\{c^T x : Ax \le b\}$$
$$\overset{\text{LP-Dualität}}{=} \min\{b^T y : y \ge 0,\ A^T y = c\}$$

Sei y^* optimal für das duale Programm und sei $A'x \le b'$ das Teilsystem von $Ax \le b$, das positiven Koordinaten in y^* entspricht. Dann gilt:

$$c^T x = \delta \iff y^{*T} A x = y^{*T} b \iff A'x = b'$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \le b$. Also ist $F = \{x \in P : A'x = b'\}$.

$\square$

<u>Lemma 5:</u> Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ein Polyeder, und sei F eine inklusions-minimale Seite. Dann ex. ein Teilsystem $A'x \le b'$ von $Ax \le b$, so dass $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$ gilt.

<u>Beweis:</u> Nach Lemma 4 können wir F schreiben als $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b',\ A''x \le b''\}$ für Teilsysteme $A'x \le b'$, $A''x \le b''$ von $Ax \le b$. Wähle $A''x \le b''$ so klein wie möglich. Angenommen es kann nicht leer gewählt werden. Dann ist aber $F' = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b',\ A''x = b''\} \subseteq P$ and eine Seite von P ($F' \ne \emptyset$) und $F' \subset F$, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

<u>Bemerkung 6:</u> Ein Polyeder P ist ganzzahlig genau dann, wenn jede Seite einen ganzzahligen Vektor enthält (Vergleiche Aufgabe 10.1).

Satz 7: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales Polyeder. Dann gilt:

P ist ganzzahlig $\Longleftrightarrow$ Jede rationale Stützhyperebene enthält einen ganzzahligen Vektor.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ eine Stützhyperebene von P mit $c \in \mathbb{Q}^n$, $\delta \in \mathbb{Q}$. Dann ist $\max\{c^T x : x \in P\}$ endlich, und also existiert ein ganzzahliger Vektor $x_0 \in P$ mit $c^T x_0 = \delta$.

„$\Leftarrow$": Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, wobei wir $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ annehmen können, und sei F eine inklusions-minimale Seite von P. Dann gibt es nach Lemma 5 ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$, so dass $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$. Falls F keinen ganzzahligen Vektor enthält, gibt es nach Satz 2 ein $y \in \mathbb{Q}^m$ mit $y^T A' \in \mathbb{Z}^n$ und $y^T b' \notin \mathbb{Z}$. Da dies auch für $y + e_i$ gilt, können wir $y > 0$ annehmen. Setze nun $c^T = y^T A'$ und $\delta = y^T b'$ dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$:

$$c^T x \leq \delta \Longleftrightarrow y^T A' x \leq y^T b' \Longleftrightarrow A'x \leq b',$$

mit Gleichheit genau für $x \in F$. Also ist $F = P \cap H$ für $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$, und da $c \in \mathbb{Z}^n$ und $\delta \notin \mathbb{Z}$, enthält H keinen ganzzahligen Vektor. $\square$

Def. 8: Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$. Das System $Ax \leq b$ heißt <u>vollständig dual ganzzahlig</u> (<u>TDI</u> = totally dual integral), falls das Minimum in der LP-Dualität

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{b^T y : y \geq 0,\ A^T y = c\},$$

für jedes $c \in \mathbb{Z}^n$, für das es endlich ist, von einem $y \in \mathbb{Z}^m$ angenommen wird.

Satz 9: Falls das System $Ax \leq b$ TDI ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, dann ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Beweis: Aufgabe 11.3. $\square$

Warnung: Die Eigenschaft "TDI" bezieht sich auf das System $Ax \leq b$, <u>nicht</u> auf das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.