Def. 8: Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$. Das System $Ax \leq b$ heißt vollständig dual ganzzahlig (TDI = totally dual integral), falls das Minimum in der LP-Dualität

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{b^T y : y \geq 0,\ A^T y = c\},$$

für jedes $c \in \mathbb{Z}^n$, für das es endlich ist, von einem $y \in \mathbb{Z}^m$ angenommen wird.

Satz 9: Falls das System $Ax \leq b$ TDI ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, dann ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Beweis: Aufgabe 11.3. $\square$

Warnung: Die Eigenschaft "TDI" bezieht sich auf das System $Ax \leq b$, nicht auf das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Beispielsweise ist $Ax \leq b$ TDI für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$A'x \leq b'$ ist nicht TDI, wobei

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{aber}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : A'x \leq b'\}.$$

Satz 10: Sei P ein rationales Polyeder. Dann gibt es $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$, so dass $Ax \leq b$ TDI ist und $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

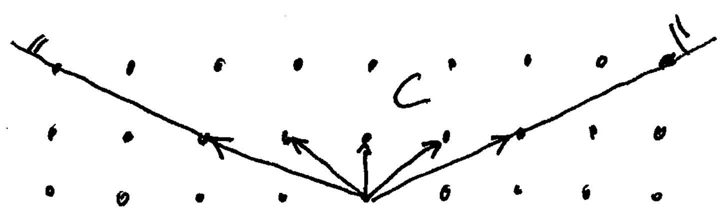
Für den Beweis müssen wir etwas ausholen.

Def 11: Seien $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{Q}^n$.

a) Die Vektoren sind eine Hilbertbasis (des von ihnen erzeugten Kegels $\operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$), falls gilt:
Für alle $b \in (\mathbb{Z}^n \cap \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_t\})$ gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{Z}$ mit
$$b = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i a_i .$$

b) Falls $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{Z}^n$ und sie eine Hilbertbasis sind, heißen sie ganzzahlige Hilbertbasis.

Beispiel 12: Sei $C = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$:



Dann ist $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Hilbertbasis (von C).

Satz 13: Sei $C = \operatorname{cone}\{v_1, \dots, v_N\}$ ein endlich erzeugter Kegel mit $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{Q}^n$. Dann existiert eine ganzzahlige Hilbertbasis $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{Z}^n$ mit $C = \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$.

Beweis: Da $\alpha_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ für Skalare $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, können wir $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{Z}^n$ annehmen. Betrachte nun das Polytop (!) $P = \{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \}$, und seien $a_1, \dots, a_t$ die ganzzahligen Punkte in P, also $P \cap \mathbb{Z}^n = \{a_1, \dots, a_t\}$. Da $\{v_1, \dots, v_N\} \subseteq \{a_1, \dots, a_t\}$ und $P \subseteq C$, gilt $C = \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$.

Sei nun $b \in \mathbb{Z}^n \cap C$. Dann ex. $\mu_1, \dots, \mu_N \geq 0$ mit

$$
\begin{aligned}
b &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_N v_N \\
&= \lfloor \mu_1 \rfloor v_1 + \dots + \lfloor \mu_N \rfloor v_N + (\mu_1 - \lfloor \mu_1 \rfloor) v_1 + \dots + (\mu_N - \lfloor \mu_N \rfloor) v_N ,
\end{aligned}
$$

wobei $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$ die eindeutige ganze Zahl mit $\lfloor r \rfloor \leq r < \lfloor r \rfloor + 1$ ist, für $r \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$
\underbrace{b - \lfloor \mu_1 \rfloor v_1 - \dots - \lfloor \mu_N \rfloor v_N}_{\in \mathbb{Z}^n} = \underbrace{(\mu_1 - \lfloor \mu_1 \rfloor) v_1 + \dots + (\mu_N - \lfloor \mu_N \rfloor) v_N}_{\in P} ,
$$

also ist dieser Vektor einer der Vektoren $a_1, \dots, a_t$, und somit ist $a_1, \dots, a_t$ eine ganzzahlige Hilbertbasis. $\square$

Satz 14: Sei $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Falls für jede Seite $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ gilt, dass die Zeilen von A' eine Hilbertbasis sind, dann ist das System $Ax \leq b$ TDI.

Beweis: Sei $c \in \mathbb{Z}^n$, so dass

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$$

endlich ist. Sei F eine inklusions-minimale Seite von P, an der das Maximum angenommen wird. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die ersten t Zeilen von A bei F aktiv sind (d.h. $a_i^T x = b_i$ für $x \in F$, $i = 1, \dots, t$).

Beh: $c \in \operatorname{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$.

Bew: Seien x_0, y_0 optimal. Die Komplementarität der Dualitätstheorie (Satz V.4.3 b)) sagt dann, dass die letzten $m-t$ Komponenten von y_0 gleich Null sind.

Also $\quad c^T x_0 = y_0^T A x_0 = \tilde{y}_0^T \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_t^T \end{bmatrix} x_0$, wobei $\tilde{y}_0$ die ersten t Komponenten von y_0 enthält (also auch $\tilde{y}_0 \geq 0$)

//

Da $a_1, \dots a_t$ eine Hilbertbasis sind, ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{Z}$ mit

$$c = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i a_i .$$

Sei $y = (\lambda_1, \dots, \lambda_t, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{Z}^m$. Dann ist

$$y^T b = y^T A x_0 = c^T x_0,$$

also ist $y \in \mathbb{Z}^m$ ein zulässiger Vektor für das duale Programm, der das Minimum annimmt. Also ist $Ax \le b$ TDI. $\square$

<u>Beweis (Satz 10):</u> Sei F eine inklusions-minimale Seite von P. Definiere den rationalen, endlich erzeugten Kegel (!)

$$C_F = \{ c \in \mathbb{R}^n : F \subseteq \{ x \in P : c^T x = \max\{ c^T y : y \in P \} \} \},$$

d.h. C_F ist die Menge aller Zielfunktionen, für die das Maximum an der Seite F angenommen wird.

Nach Satz 13 gibt es dann eine ganzzahlige Hilbert-basis $a_1, \dots, a_t$ mit $C_F = \text{cone}\{a_1, \dots, a_t\}$.

Definiere $\beta_i = a_i^T x_0$ für ein $x_0 \in F$ (beachte, dass β_i nicht von der Wahl von x_0 abhängen).

Alle Punkte aus P erfüllen dann das System

$$(\Sigma_F) \qquad a_i^T x \le \beta_i \quad , \quad i = 1, \dots, t.$$

Sei $Ax \le b$ das System, das man erhält wenn man alle Systeme (Σ_F), F minimale Seite von P, hintereinanderschreibt. Dann ist $P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \}$ und nach Satz 14 ist $Ax \le b$ TDI. $\square$