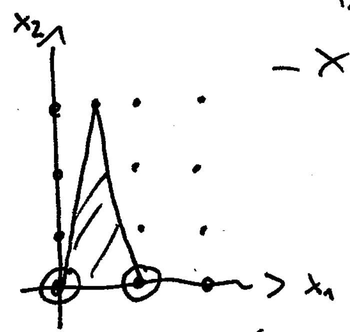
Kapitel VIII: Algorithmen der ganzzahligen Optimierung.

Falls das Polyeder der zulässigen Lösungen zu (LP) nicht ganzzahlig ist, kann die optimale Lösung beliebig stark von der optimalen Lösung des entsprechenden (ILP) abweichen:

<u>Beispiel:</u> $\max \{ x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{Z},\ x_2 \geq 0,\ x_1 + \frac{1}{2r} x_2 \leq 1,\ -x_1 + \frac{1}{2r} x_2 \leq 0 \}$ (ILP)

$r=3$:



$\rightsquigarrow$ Wert von (LP): r

Wert von (ILP): 0

§1 Der Chvátal-Gomory Abschluss

<u>Def. 1:</u> Sei P ein rationales Polyeder. Die <u>ganzzahlige Hülle</u> von P ist

$$P_I = \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n).$$

<u>Satz 2:</u> Falls P ein rationales Polyeder ist, dann ist P_I ebenfalls ein rationales Polyeder.

Beweis: Falls P beschränkt ist, dann ist $|P \cap \mathbb{Z}^n|$ endlich, also ist $\operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ ein Polytop und nach Weyl-Minkowski ein Polyeder. Da P_I ganzzahlig ist, ist es auch rational.

Angenommen P ist unbeschränkt. Dann wissen wir (Satz V.1.13, Weyl-Minkowski, allgem. Form):

$$P = Q + C, \quad \text{wobei } Q \text{ ein Polytop ist und } C = \operatorname{cone}\{y_1, \dots, y_s\}.$$

Da P rational ist, sind $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Q}^n$, und durch Skalieren können wir $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Z}^n$ annehmen.

Definiere $$B = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i y_i \; : \; 0 \le \lambda_i \le 1 \right\},$$ dann ist B wieder ein Polytop, also auch $Q + B$, und nach dem ersten Teil des Beweises auch $(Q+B)_I$.

Beh: $P_I = (Q+B)_I + C$

Bew: „$\subseteq$": Sei $p \in P \cap \mathbb{Z}^n$, dann ist $p = q + c$ mit $q \in Q$, $c \in C$. Es ist

$$c = \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) y_i}_{\in B} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \lfloor \mu_i \rfloor y_i}_{\in C \cap \mathbb{Z}^n},$$

also $p = q + c = q + b + c'$ mit $b \in B$ und $c' \in C \cap \mathbb{Z}^n$

Dann ist $q + b = p - c' \in \mathbb{Z}^n$, und also $q+b \in (Q+B)_I$

„$\supseteq$": Es ist $(Q+B)_I + C \underset{B \subseteq C}{\subseteq} Q_I + C \underset{C = C_I}{=} Q_I + C_I$

$\subseteq (Q+C)_I = P_I$. $\square$

<u>Korollar 3</u>: Falls P ein rationales Polyeder ist, dann ist P_I ganzzahlig.

<u>Beweis:</u> Sei H eine rationale Stützhyperebene von P_I mit $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$, und sei $z \in H \cap P_I$.

Da $z \in \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$, existieren $x_1, \dots, x_s \in P \cap \mathbb{Z}^n$ und

$\alpha_1, \dots, \alpha_s \geq 0$, $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$ mit $z = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i$.

Falls H keine ganzzahligen Vektoren enthält, gilt $c^T x_i < \delta$ für $i = 1, \dots, s$, also $c^T z = c^T(\sum \alpha_i x_i) < \delta$. ↯

Also ist P_I nach Satz VII.5.7 ganzzahlig. $\square$

<u>Frage</u>: Wie bekommen wir eine Beschreibung (durch Ungleichungen) von P_I?

<u>Idee</u>: Füge systematisch Halbräume H^- hinzu, für die $P_I \subseteq H^-$, aber $P \not\subseteq H^-$ gilt.

Def. 4: Sei P ein rationales Polyeder. Der **Chvátal-Gomory Abschluss** (CG-Abschluss) von P ist

$$P' = \bigcap_{\substack{H \text{ rat. Halbraum}, \\ H \supseteq P}} H_I \quad , \text{wobei } H_I = \mathrm{conv}(H \cap \mathbb{Z}^n).$$

Der Rand des (rationalen) Halbraums H_I heißt **Schnitthyperebene**.

Da $P \subseteq H$ impliziert, dass $P_I \subseteq H_I$, gilt $P \supseteq P' \supseteq P_I$.

Berechnung von H_I:

Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ mit $a \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Q}$.
Wir können OE annehmen, dass $a \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ und $\mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_n) = 1$.
H_I erhalten wir, indem wir H in Richtung $-a$ verschieben, bis ganzzahlige Punkte auf dem Rand liegen. Diese Punkte erfüllen also $a^T x = \lfloor b \rfloor$.

$$\Rightarrow \quad H_I = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \lfloor b \rfloor\}.$$

Satz 5: Sei $Ax \leq b$ TDI und $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, und sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Dann ist

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \lfloor b \rfloor\}.$$

Beweis: Sei $P \neq \emptyset$.

„$\subseteq$": Klar nach Def. von P' und H_I.

„$\supseteq$": Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \delta\}$ ein rationaler Halbraum mit $P \subseteq H$, wobei wir $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ und $H_I = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq \lfloor \delta \rfloor\}$ annehmen können.

Dann gilt

$$\delta \geq \max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\},$$

und da $Ax \leq b$ TDI ist, wird das Minimum an einem $y_0 \in \mathbb{Z}^m$ angenommen.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ax \leq \lfloor b \rfloor$. Dann ist

$$c^T x = y_0^T A x \leq y_0^T \lfloor b \rfloor \underset{y_0 \in \mathbb{Z}^m}{\leq} \lfloor y_0^T b \rfloor \leq \lfloor \delta \rfloor,$$

also $x \in H_I$ und somit $H_I \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$.

$\square$

Korollar 6: Falls P ein rationales Polyeder ist, dann ist P' ebenfalls ein rationales Polyeder.

Beweis: Nach Satz VII.5.10 gibt es zu P ein TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Dann ist P' in der Darstellung von Satz 5 ein rationales Polyeder. $\square$