Das Verfahren lässt sich also iterieren, und wir erhalten $P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \ldots \supseteq P^{(k)} \supseteq \ldots \supseteq P_I$.

<u>Frage</u>: Erreichen wir irgendwann P_I?

<u>Satz 7</u>: Sei P ein rationales Polyeder. Dann existiert ein $t \in \mathbb{N}$, so dass $P^{(t)} = P_I$.

Das kleinste t mit $P^{(t)} = P_I$ heißt der <u>Chvátal-Rang</u> von P.

<u>Lemma 8</u>: Falls $\begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix}$ TDI ist, dann auch $\begin{bmatrix} A \\ a^T \\ -a^T \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} b \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$.

<u>Beweis</u>: Sei $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit

$$(*) \quad \max\{c^T x : Ax \le b,\ a^T x = \beta\}$$
$$= \min\{b^T y + \beta(\lambda - \mu) : y \ge 0, \lambda, \mu \ge 0,\ A^T y + (\lambda - \mu) a = c\}$$

endlich. Setze $c' = c + Na$ mit $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $Na \in \mathbb{Z}^n$.

Seien x^* und y^*, λ^*, μ^* optimal für $(*)$. Dann ist

$$(**) \quad \max\{c'^T x : Ax \le b,\ a^T x \le \beta\}$$
$$= \min\{b^T y + \lambda\beta : y \ge 0, \lambda \ge 0,\ A^T y + \lambda a = c'\}$$

endlich, weil x^* zulässig für das Maximum ist, und $y^*, \lambda^* + N - \mu^*$ zulässig für das Minimum.

Also ex. nach Voraussetzung eine ganzzahlige optimale Lösung $\tilde{y}, \tilde{\lambda}$ für das Minimum in (**).

Setze $y = \tilde{y}, \lambda = \tilde{\lambda}, \mu = N$. Dann sind diese zulässig für das Minimum in (*), ganzzahlig und

$$b^T\tilde{y} + (\tilde{\lambda} - N)\beta = \underbrace{b^T\tilde{y} + \tilde{\lambda}\beta}_{\text{Wert von } (**)} - N\beta \leq b^T\underbrace{y^*}_{} + \beta(\underbrace{\lambda^* + N - \mu^*}_{}) - N\beta$$

zulässig für (**)

$$= b^T y^* + \beta(\lambda^* - \mu^*),$$

also optimal. □

<u>Lemma 9</u>: Sei P ein rationales Polyeder, F Seite von P. Dann ist $F' = P' \cap F$.

<u>Beweis</u>: Nach Satz VII.5.10 können wir P schreiben als $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $Ax \leq b$ TDI.

Sei $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ c^T x = \delta\}$ eine Seite von P, mit $c^T x \leq \delta$ für alle $x \in P$. Durch Skalieren können wir $\delta \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}^n$ annehmen.

Dann ist $\begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ \delta \end{bmatrix}$ TDI (siehe Aufgabe 12.4) und nach Lemma 8 also auch $\begin{bmatrix} A \\ c^T \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ \delta \\ -\delta \end{bmatrix}$.

Nach Satz 5 gilt dann

$$
\begin{aligned}
P' \cap F &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le \lfloor b \rfloor,\ c^T x = \delta\} \\
&\overset{\delta \in \mathbb{Z}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le \lfloor b \rfloor,\ c^T x \le \lfloor \delta \rfloor,\ -c^T x \le \lfloor -\delta \rfloor\} \\
&= F'.
\end{aligned}
$$

$\square$

<u>Beweis (Satz 7)</u>: Induktion über $\dim(P) = d$.

<u>$d = -1$:</u> $P = \emptyset$: klar.

<u>$d = 0$:</u> $P = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$: klar.

Sei <u>$d > 0$</u> und L der kleinste affine Unterraum, der P enthält. Da P rational ist, finden wir rationale C, d mit $L = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = d\}$.

Falls L kein $x_0 \in \mathbb{Z}^n$ enthält, gibt es nach Satz $\underline{\text{VII}}$.5.2 ein $y \in \mathbb{Q}^{\tilde{m}}$ mit $c := C^T y \in \mathbb{Z}^n$ und $\delta := d^T y \notin \mathbb{Z}$, wobei wir $\text{ggT}(c_i) = 1$ annehmen können.

Dann ist $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \delta\}$ (siehe Beweis von Satz $\underline{\text{VII}}$.5.7) und

$$P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \le \lfloor \delta \rfloor,\ c^T x \ge \lceil \delta \rceil\} = \emptyset,$$

wobei $\lceil r \rceil \in \mathbb{Z}$ mit $\lceil r \rceil - 1 < r \le \lceil r \rceil$ für $r \in \mathbb{R}$.

Also ist $P' = P_I$.

Falls L ganzzahlige Vektoren enthält, dann auch eine ganzzahlige Hilbertbasis, und wir können L mit dem $\mathbb{R}^d$ identifizieren. Mit anderen Worten: oE ist P volldimensional.

Nach Satz 2 (bzw. seinem Beweis) gibt es dann $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b, b' \in \mathbb{Q}^m$, so dass

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad P_I = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b'\}.$$

Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i'\}$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$.

<u>Wir zeigen:</u> Es ex. ein $s \in \mathbb{N}$ mit $P^{(s)} \subseteq H$. Da das System $Ax \leq b'$ nur $m < \infty$ Ungleichungen hat, zeigt dies den Satz.

Ang. $P^{(s)} \not\subseteq H$ für alle $s \in \mathbb{N}$. Da $P' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq \lfloor b_i \rfloor\}$, gibt es $\beta, r \in \mathbb{N}$ mit $b_i' < \beta \leq \lfloor b_i \rfloor$ und

$$(*) \quad \begin{aligned} P^{(s)} &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq \beta\} \\ P^{(s)} &\not\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq \beta - 1\} \end{aligned}$$

für alle $s \geq r$.

Sei $F = P^{(r)} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = \beta\}$. Dann ist $\dim(F) < \dim(P)$ und $F \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ (da $F \cap P_I = \emptyset$). Also ist $F^{(u)} = \emptyset$ für ein $u \in \mathbb{N}$ nach Induktionsvoraussetzung.

Nach Lemma 9 gilt dann

$$\emptyset = F^{(u)} = P^{(r+u)} \cap F = P^{(r+u)} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = \beta\}.$$

Also ist $P^{(r+u)} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x < \beta\}$ und somit

$$P^{(r+u+1)} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq \beta - 1\}, \text{ im Widerspruch zu } (*).$$

$\square$