§2 Das Simplex-Tableau

Alternative Beschreibung des Simplex-Verfahrens (Algorithmus VI.1.1).

<u>Beobachtung 1:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\sup\{c^T x : Ax \leq b\} = \sup\{c^T(x-y) : x, y \geq 0 \; A(x-y) \leq b\}$$

$$= \sup\left\{ \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0, \; \left[A \,|\, -A\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b \right\},$$

also genügt es, ein Verfahren für $P = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} : \begin{matrix} \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\ x \geq 0 \end{matrix} \right\}$ anzugeben.

<u>Simplexalgorithmus</u> (Zusammengefasst):

- Wähle aus den aktiven Ungleichungen an der Ecke x_0 ein $n \times n$-Teilsystem $A_0 x \leq b_0$ mit $\operatorname{rang}(A_0) = n$.
- Berechne u: Bestimme $(A_0^{-1})^T c$ und füge Nullen ein für Zeilen, die nicht in A_0 sind.

Falls $u \geq 0$: x_0 ist optimal $\to$ Stop

Falls $u \not\geq 0$: Sei i der kleinste Index mit $u_i < 0$.

- Berechne y: Die zu a_i^T korrespondierende Spalte von $-A_0^{-1}$.

Falls $Ay \leq 0$: $\sup = +\infty \to$ Stop

Falls $a^T y > 0$ für mind. eine Zeile a^T von A:

- Berechne $\lambda_0 = \min\left\{ \frac{b_j - a_j^T x_0}{a_j^T y} : j=1,\dots,m,\ a_j^T y > 0 \right\}$
- Setze $x_1 = x_0 + \lambda_0 y$

  A_1 = Matrix, die entsteht indem a_i^T aus A_0 gelöscht wird, und a_ℓ^T eingefügt wird, wobei ℓ der kleinste Index ist, an dem λ_0 angenommen wird.

  $b_1 = A_1 x_1$ ($\Rightarrow b_1$ Teilvektor von b)
- Starte den Algorithmus von Beginn, mit den (neuen) Objekten x_1, A_1, b_1.

Nun ist $P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ -I_n \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ und sei x_0 eine Ecke von P, A_0 wie im Algorithmus.

Definiere B_0 als die Teilmatrix von $[I_m | A]$, welche die i-te Spalte genau dann enthält, wenn die i-te Zeile von $\begin{bmatrix} A \\ -I_n \end{bmatrix}$ <u>nicht</u> in A_0 ist.

Dann ist $B_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\text{rang}(A_0) = n$ impliziert (!) $\text{rang}(B_0) = m$.

Sei $u \in \mathbb{R}^{m+n}$ definiert durch

$$u^T = -(0, c^T) + c_B^T B_0^{-1} [I_m | A],$$

wobei c_B^T die Einträge von $(0, c^T)$ enthält, die Spalten in B_0 entsprechen.

Dann gilt:

Falls die i-te Spalte zu B_0 gehört (also die i-te Zeile von $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ nicht zu A_0), dann ist $u_i = 0$ und

$$u^T \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} = -(0, c^T) \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} + c_B^T B_0^{-1} [I\ A] \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$$

$$= c^T + 0.$$

Also ist u genau der Vektor u aus dem Simplex-Algorithmus.

Definiere $\tilde{x}_0 = b - Ax_0$. Dann gilt:

Falls die k-te Zeile zu A_0 gehört (also die k-te Spalte von $[I|A]$ nicht zu B_0), dann ist $\begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ x_0 \end{bmatrix}_k = 0$ und da $[I|A] \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = b$ ist, entsprechen die restlichen Einträge $B_0^{-1} b$.

<u>Def. 2</u>: Das <u>(Simplex-) Tableau</u> zu B_0 (und x_0) ist

$$\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{u^T} & c^T x_0 \\ \hline B_0^{-1} & B_0^{-1} A & B_0^{-1} b \end{array}.$$

<u>Beobachtung 3</u>: Wir können dieses Tableau konstruieren, indem wir mit

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & -c^T & 0 \\ \hline I & A & b \end{array}$$

starten, und dann

Vielfache von Zeilen (außer der ersten) zu anderen Zeilen (inklusive der ersten) addieren, und Zeilen mit Skalaren multiplizieren, bis die Spalten von $[I|A]$, die in B_0 sind (bis auf Sortieren) der Matrix $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ entsprechen.

Falls x_0 nicht optimal ist, sei i wieder der kleinste Index mit $u_i < 0$.

Nach Def. gilt: $y \in \mathbb{R}^n$ eind. mit $a_i^T y = -1$ und $a_j^T y = 0$ für Zeilen a_j^T von $\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}$ in A_0 (also j-te Spalte nicht in B_0) und $j \neq i$.

Definiere $\tilde{y} = -Ay$. Dann gilt:

$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$ mit $[I\ A]\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ y \end{bmatrix} = 0$ und falls a_j^T in A_0 ist, $j \neq i$, dann ist $\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ y \end{bmatrix}_j = 0$, und $\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ y \end{bmatrix}_i = 1$.

Sei d die i-te Spalte von $[I\ A]$. Dann gilt:

$-B_0^{-1} d$ sind die restlichen Einträge von $\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ y \end{bmatrix}$ (also die, die Spalten in B_0 entsprechen).

Wir suchen nun das größtmögliche λ_0, so dass $x_1 := x_0 + \lambda_0 y$ im P ist.

Für $\tilde{x}_1 = b - Ax_1$ gilt dann: $\tilde{x}_1 = b - Ax_0 - \lambda_0 Ay = \tilde{x}_0 + \lambda_0 \tilde{y}$.

<u>Also:</u> Suchen λ_0 möglichst groß, so dass

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{x}_0\\ x_0\end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix}\tilde{y}\\ y\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x_1 \in P.$$

Da nur Einträge ungleich Null sind, die Spalten in B_0 entsprechen, sowie der i-te Eintrag, ist dies äquivalent zu: $\lambda_0 = \max\left\{\lambda : \begin{bmatrix}B_0^{-1}b\\ 0\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}-B_0^{-1}d\\ 1\end{bmatrix} \geq 0\right\}$

$$= \min\left\{\frac{(B_0^{-1}b)_j}{(B_0^{-1}d)_j} : j = 1,\dots,m,\ (B_0^{-1}d)_j > 0\right\}$$

[Da $x_0 \in P$, also $x_0 \geq 0$, ist $\begin{bmatrix}\tilde{x}_0\\ x_0\end{bmatrix} \geq 0$, also auch $B_0^{-1}b \geq 0$]

Falls das Minimum nicht existiert (also $B_0^{-1}d \leq 0$), dann ist $\sup = +\infty$.

Sonst: Sei k der kleinste Index, an dem das Minimum angenommen wird. Dann ist B_1 = Matrix, die entsteht indem die k-te Spalte aus B_0 gelöscht wird und die i-te Spalte von $[I \mid A]$ in B_0 eingefügt wird.

<u>Simplex-Tableau zu B_1 und x_1:</u>

Addiere Vielfache der $(k+1)$-ten Zeile zu den Anderen, multipliziere die $(k+1)$-te Zeile mit einem Skalar, so dass die i-te Spalte zu e_{k+1} wird (siehe Beobachtung 3)

Spalten, die zu B_0 und B_1 gehören, werden so nicht verändert.

Bemerkung 4: Falls $b \geq 0$, können wir direkt so starten, wie wir das Tableau zu B_1 bestimmen.

Beispiel 5: Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_0 = -I_2 \Rightarrow B_0 = I_3$$

				i ↓		
	0	0	0	−1	−2	0
	1	0	0	1	1	5/2
→	0	1	0	1	−1	1
	0	0	1	−1	1	1

$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{5/2}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1$ mit $k+1 = 3$ $\left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\rightsquigarrow$

					i ↓	
	0	1	0	0	−3	1
→	1	−1	0	0	2	3/2
	0	1	0	1	−1	1
	0	1	1	0	0	2

$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{3/2}{2} \right\} = 3/4$ mit $k+1 = 2$ $\left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\rightsquigarrow$

		i ↓				
	3/2	−1/2	0	0	0	13/4
	1/2	−1/2	0	0	1	3/4
	1/2	1/2	0	1	0	7/4
→	0	1	1	0	0	2

$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{7/4}{1/2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$ mit $k+1 = 4$ $\left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right)$

$\rightsquigarrow$

3/2	0	1/2	0	0	17/4
1/2	0	1/2	0	1	7/4
1/2	0	−1/2	1	0	3/4
0	1	1	0	0	2

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3/4 \\ 7/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/4 \end{bmatrix}.$$