§3 CG-Schnitte aus dem Simplex-Tableau.

Um den CG-Abschluss P' von $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ zu berechnen, betrachten wir alle rationalen Halbräume H mit $P \subseteq H$. Da P' aber auch ein rationales Polyeder ist, wissen wir dass endlich viele Halbräume ausreichen.

In der Tat: Falls $Ax \leq b$ TDI und $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, dann kennen wir Ungleichungen, die P' beschreiben:

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \lfloor b \rfloor\} \quad (\text{Satz } \underline{\text{VIII}}.1.5)$$

Wir wissen auch, dass wir immer ein TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ finden können (Satz $\overline{\text{VII}}$.5.10).

<u>Allerdings</u>: Diese Beschreibung wird sehr schnell sehr groß; Viele Ungleichungen werden nicht gebraucht um P zu beschreiben.

<u>Darum</u>: Suche "billige" (= leicht zu ermittelnde) rationale Halbräume H mit $P \subseteq H$ (und möglichst $P \not\subseteq H_I$).

Lemma 1: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0,\ Ax \leq b\}$, und $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$. Dann gilt

$$\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor \quad \text{für alle } x \in P_I .$$

Beweis: Sei $y \in P$. Dann gilt $u^T A y \leq u^T b$, da $u \geq 0$. Wenn wir nun jeden Koeffizienten $u^T A$ abrunden, wird die Ungleichung höchstens schwächer, also ist $\lfloor u^T A \rfloor y \leq u^T b$ auch erfüllt, für beliebiges $y \in P$.

Sei nun $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Dann ist $\lfloor u^T A \rfloor x \in \mathbb{Z}$, also gilt $\lfloor u^T A \rfloor x \leq \lfloor u^T b \rfloor$. Da diese Ungleichung für alle $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$ gilt, muss sie auch für alle $x \in \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n) = P_I$ gelten.

$\square$

Lemma 2: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0,\ Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, und sei $u \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\lfloor u^T A \rfloor x - \lfloor u \rfloor^T A x \leq \lfloor u^T b \rfloor - \lfloor u \rfloor^T b \quad \text{für alle } x \in P_I .$$

Beweis: Für $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\lfloor r + k \rfloor = \lfloor r \rfloor + k$.

Sei $\tilde{u} = u - \lfloor u \rfloor$, also $\tilde{u} \geq 0$. Dann gilt

$$\lfloor \tilde{u}^T A \rfloor = \lfloor u^T A - \underbrace{\lfloor u \rfloor^T A}_{\in \mathbb{Z}^n} \rfloor = \lfloor u^T A \rfloor - \lfloor u \rfloor^T A \qquad \text{und}$$

$$\lfloor \tilde{u}^T b \rfloor = \lfloor u^T b - \underbrace{\lfloor u \rfloor^T b}_{\in \mathbb{Z}} \rfloor = \lfloor u^T b \rfloor - \lfloor u \rfloor^T b .$$

Die Behauptung folgt dann mit Lemma 1. $\square$

<u>Beobachtung 3:</u> Wir können $Ax \leq b$ immer schreiben als $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x \geq b_2$ mit $b_1 \geq 0$, $b_2 > 0$.

Dann ist

$$\max\{c^T x : x \geq 0,\ Ax \leq b\}$$
$$= \max\{c^T x : x, \tilde{x} \geq 0,\ A_1 x \leq b_1,\ A_2 x - \tilde{x} = b_2\},$$

und für genügend großes M finden wir eine optimale Lösung hierfür, wenn wir eine optimale Lösung für

$$\max\{c^T x + M \cdot \mathbb{1}^T (A_2 x - \tilde{x}) : x, \tilde{x} \geq 0,\ A_1 x \leq b_1,\ A_2 x - \tilde{x} \leq b_2\}$$

finden. (Denn: Für M groß genug wird $A_2 x - \tilde{x} = b_2$ erzwungen.)

Also nehmen wir ab jetzt $b \geq 0$ an.

<u>Beobachtung 4:</u> Sei $N = \{ j \in \{1, \dots, m+n\} : \text{Spalte } j \text{ ist nicht im } B_k \}$

Dann hat jede Zeile (außer die oberste) des Tableaus zu B_k die Form

$$y_i + \sum_{j \in N} \tilde{A}_{ij} y_j = \tilde{b}_i \quad , \text{wobei}$$

$$y = \begin{pmatrix} x_u \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = [B_k^{-1} \mid B_k^{-1} A], \quad \bar{b} = [B_k^{-1} b].$$

Nach Beobachtung 2.3 ist dies eine Linearkombination der Gleichungen $[I \mid A] y = b$, also $u^T [I \mid A] y = u^T b$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass u^T der i-ten Zeile von B_k^{-1} entspricht.

<u>Beispiel 5:</u> (Wie Beispiel 2.5)

Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0,\ Ax \leq b \}$$

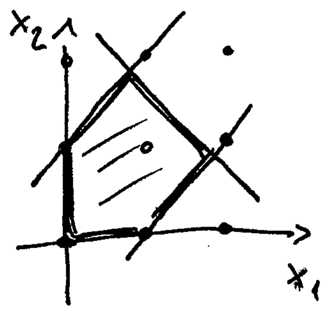


Tableau zu B_0:

$$\begin{array}{r|ccccc|c}
 & & & & \downarrow & & \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \\
\rightarrow & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1
\end{array}$$

Tableau zu B_1:

$$\begin{array}{r|ccccc|c}
 & & & & & \downarrow & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\
\hline
\rightarrow & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 3 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2
\end{array}$$

Tableau zu B_2:

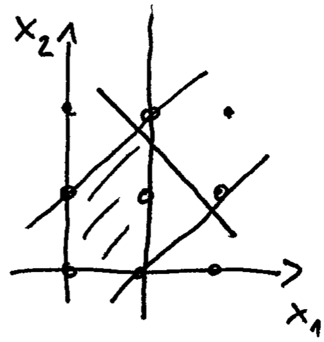
	$3/4$	$-1/2$	0	0	0	$13/4$
$u_1^T =$	$1/4$	$-1/2$	0	0	1	$3/4$
$u_2^T =$	$1/4$	$1/2$	0	1	0	$7/4$
	0	1	1	0	0	2

$$\Rightarrow \lfloor u_1^T A \rfloor = \left\lfloor \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) \right\rfloor = (0, 1)$$

$$\lfloor u_1 \rfloor^T A = (0, -1, 0) A = (-1, 1)$$

$$\lfloor u_1^T b \rfloor = \lfloor 5/4 - \tfrac{1}{2} \rfloor = 0$$

$$\lfloor u_1 \rfloor^T b = -1$$



$$\Rightarrow (0, 1)x - (-1, 1)x \leq 0 - (-1)$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq 1$$

$u_2 = u_1 - \lfloor u_1 \rfloor$, also die gleiche Ungleichung.

2 Möglichkeiten:

Option 1: Direkt neu starten.

→ Kann schnell sein, falls die gefundene Ungl. "stark" ist

Option 2: Weiter zum optimalen Tableau, alle neuen Ungleichungen sammeln, dann Neustart mit diesen an A angefügt.

→ Generell bevorzugt, weil leichter zu analysieren, und potentiell weniger Tableaus