Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

# Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

**— Aufgabenblatt 1 —**

**Aufgabe 1.1** Prüfen Sie für die folgenden $f$-$g$-Paare, ob $f = o(g)$, $g = o(f)$ oder $f = \Theta(g)$ gilt. Falls $f = o(g)$ gilt, bestimmen Sie den kleinsten Wert für $n$, so dass $f(n) < g(n)$ ist.

1. $f(n) = 1000n$, $g(n) = n \log n$
2. $f(n) = \sqrt{n}$, $g(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$
3. $f(n) = n^{100}$, $g(n) = 2^{(\log n)^2}$
4. $f(n) = n^2$, $g(n) = 2n^2 + 100\sqrt{n}$

**Aufgabe 1.2** Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. $f \in o(g) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
2. $O(f) + O(g) = O(|f| + |g|)$
3. $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

**Aufgabe 1.3** Bestimmen Sie für die folgenden Funktion $f$ Funktionen $g$, die nicht durch Rekursionsformeln beschrieben sind, so dass jeweils $f(n) = \Theta(g(n))$gilt und überprüfen Sie diese Eigenschaft.

1. $f(n) = f(n-1) + 10$
2. $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + 10$
3. $f(n) = 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2$
4. $f(n) = f(n-1) + n$

*Hinweis:* Sie können annehmen, dass $f(1) = f(2) = \cdots = f(10) = 1$ ist und die Rekursionsformel für $n > 10$ anwenden.

**Aufgabe 1.4** (10 Punkte) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-2n}\sqrt{n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

*Hinweis:* Verwenden Sie das Integral $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n dx$. Partielle Integration liefert die Rekursionsformel $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Zeigen Sie zunächst, dass $I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}$ gilt.

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 26. Oktober 2016 um 12 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.