Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 1.4 —

Aufgabe 1.4 (10 Punkte) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-2n}\sqrt{n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Integral $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n dx$. Partielle Integration liefert die Rekursionsformel $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Zeigen Sie zunächst, dass $I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}$ gilt.

Lösung
Berechne I_n für n ungerade ($n = 2k+1$):

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{2k}{2+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

Berechne I_n für n gerade ($n = 2k$):

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Berechne $I_n I_{n-1}$ für $n = 2k+1$:

$$I_n I_{n-1} = I_{2k+1}I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2n}$$

Berechne $I_n I_{n-1}$ für $n = 2k$:

$$I_n I_{n-1} = I_{2k}I_{2k-1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2n}$$

Somit gilt:

$$I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}, \text{ woraus folgt } \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Des Weiteren gilt:

$$(2k+1)I_{2k+1} = \frac{2\cdots 2k}{3\cdots(2k-1)} = \frac{(2\cdots 2k)^2}{3\cdots(2k-1)\cdot 2\cdots 2k} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!}$$

und folglich

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n}}I_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}(2n+1)} = \sqrt{\pi}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} 2^{-2n}\sqrt{n}\binom{2n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,2^{-2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\\ &= \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$