Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Aufgabenblatt 4 —

Aufgabe 4.1 Gegeben sei folgende Formel

$$F = \forall x \; \exists y \; P(x, y, f(z)).$$

Bestimmen Sie eine Struktur $\mathcal{A}$, die Modell für F ist, und eine Struktur $\mathcal{B}$, die kein Modell für F ist.

Aufgabe 4.2 Welche der folgenden Strukturen sind Modelle für die Formel

$$F = \exists x \; \exists y \; \exists z \; (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x)) \;\; ?$$

1. $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$
2. $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}} = \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}$
3. $U_{\mathcal{A}} = \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge von $\mathbb{N}$), $P^{\mathcal{A}} = \{(A, B) \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, A \subseteq B\}$

Aufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass $\forall x \; \exists y \; P(x, y)$ eine Folgerung von $\exists y \; \forall x \; P(x, y)$ ist, aber nicht umgekehrt.

Aufgabe 4.4 (10 Punkte) Sei $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Das Schubfachprinzip besagt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ keine injektive Abbildung $f : [n] \to [n-1]$ gibt.

1. Für festes $n \in \mathbb{N}$ formulieren Sie das Schubfachprinzip als eine unerfüllbare aussagenlogische Formel mit atomaren Formeln $x_{i,j}$ und mit der Bedingung $x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } f(i) = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
2. Verwenden Sie die Resolution, um das Schubfachprinzip für $n = 2$ und $n = 3$ zu zeigen
3. **(Bonusaufgabe: +5 Punkte)** Implementieren Sie ein Programm, das mit Hilfe der Resolution das Schubfachprinzip für gegebenes n berechnet. Bis zu welchem Wert n kann Ihr Programm die Berechnung durchführen? (Bitte geben Sie den Programmcode mit ab).

Abgabe: Bis Mittwoch, 16. November 2016 um 12 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen und Matrikelnummer auf die Abgabe schreiben.

> [...]
>
> Computing is normally done by writing certain symbols on paper. We may suppose this paper is divided into squares like a child's arithmetic book. In elementary arithmetic the two-dimensional character of the paper is sometimes used. But such a use is always avoidable, and I think that it will be agreed that the two-dimensional character of paper is no essential of computation. I assume then that the computation is carried out on one-dimensional paper, i.e. on a tape divided into squares. I shall also suppose that the number of symbols which may be printed is finite.
>
> [...]

A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society **42** (1937), 230—265, available from `http://www.turingarchive.org`