Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 4.4 —

Aufgabe 4.4 (10 Punkte) Sei $[n] = \{1, \dots, n\}$. Das Schubfachprinzip besagt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ keine injektive Abbildung $f : [n] \to [n-1]$ gibt.

1. Für festes $n \in \mathbb{N}$ formulieren Sie das Schubfachprinzip als eine unerfüllbare aussagenlogische Formel mit atomaren Formeln $x_{i,j}$ und mit der Bedingung $x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } f(i) = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
2. Verwenden Sie die Resolution, um das Schubfachprinzip für $n = 2$ und $n = 3$ zu zeigen
3. **(Bonusaufgabe: +5 Punkte)** Implementieren Sie ein Programm, das mit Hilfe der Resolution das Schubfachprinzip für gegebenes n berechnet. Bis zu welchem Wert n kann Ihr Programm die Berechnung durchführen? (Bitte geben Sie den Programmcode mit ab).

Lösung

1. Gesucht ist eine unerfüllbare aussagenlogische Formel für das Schubfachprinzip. Somit ist eine Formel F zu bestimmen, die genau dann erfüllbar ist, falls es eine injektive Abbildung $f : [n] \to [n-1]$ existiert. Da f eine Abbildung von $[n]$ nach $[n-1]$ ist, muss für jedes $i \in [n]$ ein $j \in [n-1]$ existieren, so dass $x_{i,j} = 1$ gilt. Somit enthält die gesuchte Formel folgende Teilformel:
$$\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{n-1} x_{i,j} \right)$$
Des Weiteren stellt folgende Teilklausel die Injektivität der Abbildung f sicher:
$$\bigwedge_{k=1}^{n-1} \left(\bigwedge_{1 \le i \ne j \le n} (\neg x_{i,k} \vee \neg x_{j,k}) \right)$$
Somit ist die gesuchte Formel:
$$F = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{n-1} x_{i,j} \right) \right) \wedge \left(\bigwedge_{k=1}^{n-1} \left(\bigwedge_{1 \le i \ne j \le n} (\neg x_{i,k} \vee \neg x_{j,k}) \right) \right)$$
2. Sei $n = 2$:
$$F = x_{1,1} \wedge x_{2,1} \wedge (\neg x_{1,1} \vee \neg x_{2,1})$$
$\text{Res}^0(F) = F = \{\{x_{1,1}\}, \{x_{2,1}\}, \{\neg x_{1,1}, \neg x_{2,1}\}\}$
$\text{Res}^1(F) \setminus \text{Res}^0(F) = \{\{\neg x_{1,1}\}, \{\neg x_{2,1}\}\}$
$\text{Res}^2(F) \setminus \text{Res}^1(F) = \{\emptyset\}$
Da $\emptyset$ in $\text{Res}^2(F)$ und somit auch in $\text{Res}^*(F)$ enthalten ist, ist die Formel F unerfüllbar.

Sei $n = 3$:

$$
\begin{aligned}
F =& (x_{1,1} \vee x_{1,2}) \wedge (x_{2,1} \vee x_{2,2}) \wedge (x_{3,1} \vee x_{3,2}) \wedge (\neg x_{1,1} \vee \neg x_{2,1}) \wedge \\
& (\neg x_{1,1} \vee \neg x_{3,1}) \wedge (\neg x_{2,1} \vee \neg x_{3,1}) \wedge (\neg x_{1,2} \vee \neg x_{2,2}) \wedge (\neg x_{1,2} \vee \neg x_{3,2}) \wedge (\neg x_{2,2} \vee \neg x_{3,2})
\end{aligned}
$$

Berechnung der Resolventen:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}(\{\neg x_{1,1}, \neg x_{2,1}\}, \{x_{2,1}, x_{2,2}\}) = \{\neg x_{1,1}, x_{2,2}\} \\
&\mathrm{R}(\{\neg x_{2,2}, \neg x_{3,2}\}, \{\neg x_{1,1}, x_{2,2}\}) = \{\neg x_{1,1}, \neg x_{3,2}\} \\
&\mathrm{R}(\{x_{3,2}, x_{3,1}\}, \{\neg x_{1,1}, \neg x_{3,2}\}) = \{\neg x_{1,1}, x_{3,1}\} \\
&\mathrm{R}(\{\neg x_{3,1}, \neg x_{1,1}\}, \{\neg x_{1,1}, x_{3,1}\}) = \{\neg x_{1,1}\}
\end{aligned}
$$

Somit ist $\{\neg x_{1,1}\}$ in $\mathrm{Res}^*(F)$ enthalten.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{R}(\{x_{1,1}, x_{1,2}\}, \{\neg x_{2,1}, \neg x_{2,2}\}) = \{x_{1,1}, \neg x_{2,2}\} \\
&\mathrm{R}(\{x_{1,1}, \neg x_{2,2}\}, \{x_{2,2}, x_{2,1}\}) = \{x_{1,1}, x_{2,1}\} \\
&\mathrm{R}(\{x_{1,1}, x_{2,1}\}, \{\neg x_{2,1}, \neg x_{3,1}\}) = \{x_{1,1}, \neg x_{3,1}\} \\
&\mathrm{R}(\{x_{1,1}, \neg x_{3,1}\}, \{x_{3,1}, x_{3,2}\}) = \{x_{1,1}, x_{3,2}\} \\
&\mathrm{R}(\{x_{1,1}, x_{3,2}\}, \{\neg x_{3,2}, \neg x_{1,2}\}) = \{x_{1,1}, \neg x_{1,2}\} \\
&\mathrm{R}(\{x_{1,1}, \neg x_{1,2}\}, \{x_{1,2}, x_{1,1}\}) = \{x_{1,1}\}
\end{aligned}
$$

Da $\{\{\neg x_{1,1}\}, \{x_{1,1}\}\} \subset \mathrm{Res}^*(F)$ und $\mathrm{R}(\{\neg x_{1,1}\}, \{x_{1,1}\}) = \emptyset$, gilt $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(F)$ und somit ist F unerfüllbar.