Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

# Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

**— Lösungsskizze zur Aufgabe 5.4 —**

**Aufgabe 5.4** (10 Punkte) Simulieren Sie eine Matrix-Turingmaschine mit Hilfe einer herkömmlichen Turingmaschine. Eine Matrix-Turingmaschine besitzt eine unendliche dreidimensionale “Matrix” als Speicher und der Kopf kann sich in sieben Richtungen (Oben, Unten, Links, Rechts, Vor, Zurück, Nichts) bewegen.

**Lösung**
Zur Simulation einer Matrix-Turingmaschine $M$ mit Hilfe einer herkömmlichen Turingmaschine $M'$ ist zunächst eine injektive Abbildung zu bestimmen, die jeder Position $(x, y, z)$ in der Matrix von $M$ eine Position $i$ im eindimensionalen Speicher von $M'$ zuordnet. Da die Matrix in allen drei Koordinaten zu beiden Richtungen unbeschränkt ist, können die Indizes negativen Wert annehmen. Somit ist eine injektive Abbildung $k : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ zu finden. Hierzu betrachten wir uns zunächst die *Cantorsche Paarungsfunktion* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = y + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1).$$

Diese lässt sich erweitern zu einer injektive Abbildung $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(x, y, z) = f(f(x, y), z).$$

Da $x, y, z$ negative Werte annehmen können, wird eine Funktion $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ benötigt. Diese definieren wir wie folgt:

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

Für die Zuordnung der Einträge der Matrix zu den Einträgen des eindimensionalen Bands verwenden wir die Funktion $k : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{N}$ mit

$$k(x, y, z) = g(h(x), h(y), h(z)).$$

Entsprechend der Zuordnung von $k$ werden alle Einträge des dreidimensionalen Speichers von $M$ auf das erste Band von $M'$ geschrieben. Sei $i = k(x, y, z)$ die Position an der sich der Kopf auf dem ersten Band befindet. Auf dem zweiten Band von $M'$ wird der Wert von $x$ gespeichert, in dem $x$-viele 1 auf Band 2 geschrieben werden. Auf Band 3 und 4 werden analog die Wert für $y$ und $z$ gespeichert. Wird der Kopf in $M'$ in eine der sieben Richtungen verschoben, so ändert sich der Wert für $x$, $y$ oder $z$ um 1 oder es ändert sich nichts. Falls sich einer dieser Werte ändert, wird auf Band 5 mit Hilfe der Bänder 2-4 der neue Index für Band 1 berechnet. Auf Band 6 werden die Richtung und die Anzahl der Schritte zur Verschiebung des Kopfes in Band 1 berechnet. Somit erhalten wir eine 6-Band Turingmaschine, die die Matrix-Turingmaschine simuliert.