



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 2.4 —

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass es eine Formel F in 3-KNF gibt, so dass es keine Formel F' in 2-KNF gibt, die zu F äquivalent ist.

Lösung

Sei $F = A \vee B \vee C$ eine 3-KNF mit einer Klausel, die aus drei verschiedenen Literalen besteht. Angenommen es existiert eine zu F äquivalente 2-KNF F' . Da F' eine 2-KNF ist, hat sie die Form

$$F' = K_1 \wedge K_2 \wedge \dots \wedge K_n,$$

wobei jede Klausel K_i maximal aus 2 Literalen besteht.

1. Angenommen es existiert eine Klausel $K_i = L$, die nur ein Literal L enthält.

- (a) Angenommen $L \in \{A, B, C\}$. Setze $A(L) = 0$ und $A(L') = 1$ für $L' \in \{A, B, C\} \setminus \{L\}$, dann gilt $A(F) = 1$ und $A(F') = 0$, woraus folgt, dass F und F' nicht äquivalent sind.
- (b) Sei $L \notin \{A, B, C\}$. Setze $A(L) = 0$ und $A(L') = 1$ für $L' \in \{A, B, C\}$. Dann gilt $A(F) = 1$ und $A(F') = 0$ und somit sind F und F' nicht äquivalent.

Wir können somit annehmen, dass alle Klauseln in F' aus genau zwei Literalen bestehen.

2. Sei $K_i = L_i \vee L'_i$.

- (a) Sei $L_i, L'_i \in \{A, B, C\}$, dann gibt es ein $\tilde{L}_i \in \{A, B, C\} \setminus \{L_i, L'_i\}$. Für

$$A(L) = \begin{cases} 0 & L \in \{L_i, L'_i\} \\ 1 & L = \tilde{L}_i \end{cases}$$

gilt $A(F) = 1$ und $A(F') = 0$ und somit sind F und F' nicht äquivalent.

- (b) Sei $L_i, L'_i \notin \{A, B, C\}$. Für

$$A(L) = \begin{cases} 0 & L \in \{L_i, L'_i\} \\ 1 & L \in \{A, B, C\} \end{cases}$$

gilt $A(F) = 1$ und $A(F') = 0$ und somit sind F und F' nicht äquivalent.

- (c) Sei $L_i \in \{A, B, C\}, L'_i \notin \{A, B, C\}$. Für

$$A(L) = \begin{cases} 0 & L \in \{L_i, L'_i\} \\ 1 & L \in \{A, B, C\} \setminus \{L_i\} \end{cases}$$

gilt $A(F) = 1$ und $A(F') = 0$ und somit sind F und F' nicht äquivalent.