Kapitel 2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik: Erweiterung der Aussagenlogik um Quantoren, Funktions-, Prädikatsymbole.

§1 Syntax der Prädikatenlogik

Def.: (a) Variable hat die Form x_i, $i \in \mathbb{N}$.

(b) Prädikatsymbol hat die Form P_i^k, $i = 1, 2, \ldots$ $k = 0, 1, 2, \ldots$; k gibt die Stelligkeit an

(c) Funktionssymbol hat die Form f_i^k, $i = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$

(d) Term wird wie folgt rekursiv definiert:

1. Jede Variable ist ein Term
2. Falls f Fkt.symbol der Stelligkeit k ist, und $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

[bei Stelligkeit 0 werden die Klammern weggelassen, Nullstellige Fkt.symbole heißen Konstanten]

(e) Eine Formel (der Prädikatenlogik) wird wie folgt rekursiv definiert:

1. Falls P Prädikatsymb. der Stelligkeit k ist und falls $t_1, \dots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel.

2. Falls F Formel, dann auch $\neg F$.

3. Falls F, G Formeln, dann auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$.

4. Falls x Variable und F Formel, dann auch

$$\exists x\, F \quad \text{und} \quad \forall x\, F$$

Existenzquantor — Allquantor

(f) Atomare Formeln sind Formeln, die gemäß 1. aufgebaut sind

(g) F Formel und F Teil einer Formel G, dann heißt F Teilformel von G.

Vorkommen von Variablen wird unterteilt in frei und gebunden: Vorkommen von x in F gebunden: x kommt in Teilformel der Form $\forall x\, G$ oder $\exists x\, G$ vor; ansonsten: Vorkommen von x frei. Formel ohne Vorkommen von freien Variablen heißt geschlossen / Aussage.

Bsp.: $F = \left(\exists x_1 P_5^2(x_1, f_2^1(x_2)) \vee \neg \forall x_2 P_4^2(x_2, f_1^0)\right)$

geb. frei geb.

D.h. F ist keine Aussage.

Vereinfachung der Notation:

u, v, w, x, y, z	Variablen
a, b, c	Konstanten
f, g, h	Funktionssymbole
P, Q, R	Prädikatsymbole.

§ 2 Semantik der Prädikatenlogik

Def.: (a) Ein Paar $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ heißt Struktur, wobei $U_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ die Grundmenge (Universum) von $\mathcal{A}$ ist und $I_{\mathcal{A}}$ eine Abbildung ist, die

- jedem k-stelligen Prädikatsymbol (im Def.bereich von $I_{\mathcal{A}}$) ein k-stelliges Prädikat über $U_{\mathcal{A}}$,
- jedem k-stelligen Fkt.symbol (im Def.bereich von $I_{\mathcal{A}}$) eine k-stellige Fkt. auf $U_{\mathcal{A}}$,

· jeder Variablen (im Def.bereich von $I_{\mathcal{A}}$) ein Element aus $U_{\mathcal{A}}$

zuordnet.

(b) Sei F eine Formel und $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ eine Struktur. $\mathcal{A}$ heißt zu F <u>passend</u>, falls $I_{\mathcal{A}}$ für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Fkt.symbole und freie Variablen definiert ist.

<u>Bsp.</u>: $F = \forall x (P(x, f(x)) \wedge Q(g(a,z)))$

$\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ zu F passende Struktur:

$U_{\mathcal{A}} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$I_{\mathcal{A}}(P) = \{(m,n) : m, n \in U_{\mathcal{A}},\ m < n\}$

$I_{\mathcal{A}}(Q) = \{n : n \in U_{\mathcal{A}},\ n \text{ prim}\}$

$I_{\mathcal{A}}(f)(n) = n+1$

$I_{\mathcal{A}}(g)(m,n) = m+n$

$I_{\mathcal{A}}(a) = 2$

$I_{\mathcal{A}}(z) = 3$

<u>Def.:</u> Sei F eine Formel und sei $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ eine zu F passende Struktur.

(a) Für jeden Term t, den man aus F bilden kann, definiere den <u>Wert</u> $\mathcal{A}(t)$ rekursiv wie folgt:

1. Falls t eine Variable $t = x$ ist, dann ist

$$\mathcal{A}(t) = I_{\mathcal{A}}(x)$$

2. Falls $t = f(t_1, \dots, t_k)$ ist, dann ist

$$\mathcal{A}(t) = I_{\mathcal{A}}(f)\left(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)\right).$$

(b) Für F definiere den <u>(Wahrheits-) Wert</u> der Formel F, rekursiv wie folgt:

1. Falls $F = P(t_1, \dots, t_k)$, dann

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_k)) \in I_{\mathcal{A}}(P) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Falls $F = \neg G$, dann

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(G) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

3. Fall $F = (G \wedge H)$

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fall $F = (G \vee H)$:

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Fall $F = \forall x\, G$:

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } d \in U_{\mathcal{A}} \text{ gilt } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Fall $F = \exists x\, G$:

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & \text{falls es ein } d \in U_{\mathcal{A}} \text{ gibt mit } \mathcal{A}_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $\mathcal{A}_{[x/d]}$ die Struktur $\mathcal{A}'$, die man aus $\mathcal{A}$ erhält, wenn man $I_{\mathcal{A}'}(x) = d$ setzt.
[falls vorher $I_{\mathcal{A}}(x)$ definiert war, dann wird dies ignoriert.]

(c) Falls $\mathcal{A}(F) = 1$, dann heißt $\mathcal{A}$ <u>Modell</u> von F, $\mathcal{A} \models F$. Falls jede zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ ein Modell ist, dann heißt F <u>gültig</u>, $\models F$.

Falls F mind. ein Modell besitzt, dann heißt F <u>erfüllbar</u>, sonst <u>unerfüllbar</u>.

(d) F und G heißen äquivalent, falls für jede zu F und G passende Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Notation: $F \equiv G$.

<u>Satz</u> (a) $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$

$\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

(b) Falls x in G nicht frei vorkommt:

$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$

$(\forall x F \vee G) \equiv \forall x (F \vee G)$

$(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x (F \wedge G)$

$(\exists x F \vee G) \equiv \exists x (F \vee G)$

(c) $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$

$(\exists x G \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$

(d) $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$

$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

<u>Bew.</u>: selbst. ($\rightarrow$ Blatt 4)

<u>Bsp.:</u> $F = \forall x\, P(x, f(x))$

$\wedge\ \forall y\, \neg P(y,y)$

$\wedge\ \forall u\, \forall v\, \forall w\, ((P(u,v) \wedge P(v,w)) \Rightarrow P(u,w))$

besitzt unendliches Modell $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$:

$U_{\mathcal{A}} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$I_{\mathcal{A}}(P) = \{(m,n) : m < n\}$

$I_{\mathcal{A}}(f)(n) = n+1$

Aber F besitzt kein endliches Modell: Ang. $\mathcal{B} = (U_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}})$ wäre ein Modell von F und $|U_{\mathcal{B}}| < \infty$. Sei $m \in U_{\mathcal{B}}$.

Betrachte die Folge

$m_0, m_1, \dots \in U_{\mathcal{B}}$ mit $m_0 = m$ und $m_{i+1} = I_{\mathcal{B}}(f)(m_i)$.

Da $|U_{\mathcal{B}}| < \infty$ gibt es i, j mit $i < j$ und $m_i = m_j$.

Es gilt $(m_0, m_1), (m_1, m_2), \dots \in I_{\mathcal{B}}(P)$. Außerdem folgt $(m_i, m_j) \in I_{\mathcal{B}}(P)$, was nicht sein darf.