<u>Ziel:</u> Zeige, dass das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik nicht rekursiv ist.

Führe dazu das <u>Postsche Korrespondenzproblem</u> <u>(PKP)</u> als „Zwischenproblem" ein.

<u>Def.:</u> (PKP, nach Emil Post (1897-1954, polnisch-amer. Logiker)

$\Sigma$ endl. Alphabet, $K = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k))$ endl. Folge von Wortpaaren über $\Sigma$, wobei $x_i, y_i$ nicht-leere Worte sind. <u>PKP</u> = Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, so dass

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

gilt?

<u>Bsp.:</u> $K = ((1, 111), (10111, 10), (10, 0))$ hat Lösung $i_1 = 2$, $i_2 = 1$, $i_3 = 1$, $i_4 = 3$, weil

$$10111|1|1|10 = 10|111|111|0$$

**Bsp.:** $K = ((10, 101), (101, 011), (011, 11))$

hat keine Lösung. Ang. es hätte eine Lösung,

dann $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 2$, ...

$\rightarrow$ Folge nicht endlich.

$10|101|101|\ldots$
$= 101|011|011|\ldots$

Noch ein Zwischenproblem:

**Def.:** Das <u>modifizierte PKP</u> (<u>MPKP</u>).

Genauso wie PKP, nur wird $i_1 = 1$ gefordert.

**Satz** <u>PKP ist nicht rekursiv</u>:

(a) $MPKP \leq PKP$.

(b) $U = \{\langle M \rangle w : TM \text{ akzeptiert } w\} \leq MPKP$

(c) $U$ ist nicht rekursiv.

**Bew.:** (a) Sei $K = ((x_1, y_1), \ldots (x_k, y_k))$

Eingabe für MPKP. Konstruiere nun

Eingabe $f(K)$ für PKP wie folgt:

Seien A, Z Buchstaben, die in K nicht vorkommen

(sonstige falls nötig $\Sigma$ um A, Z).

Setze

$$f(K) = ((x_0', y_0'), (x_1', y_1'), \dots, (x_k', y_k'), (x_{k+1}', y_{k+1}'),$$

wobei

(i) $x_0' = A x_1'$ , $y_0' = y_1'$

(ii) $x_{k+1}' = Z$ , $y_{k+1}' = AZ$

(iii) für $i \in \{1, \dots, k\}$:

$x_i'$ entsteht aus $x_i$, indem <u>hinter</u> jeden Buchstaben ein A eingefügt wird.

(z.B. $x_i = 0110$, $x_i' = 0A1A1A0A$)

$y_i'$ entsteht aus $y_i$, indem <u>vor</u> jeden Buchstaben ein A eingefügt wird.

<u>Klar</u>: $f$ ist (durch eine TM) berechenbar.

<u>Zu zeigen</u>: $K \in MPKP \iff f(K) \in PKP$.

<u>„$\Rightarrow$"</u>: Sei $(1, i_2, \dots, i_n)$ Lösung für $K$.
Dann ist $(0, i_2, \dots, i_n, k+1)$ Lösung für $f(K)$:

$$x_1 x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} = a_1 a_2 \dots a_s \in \Sigma^s$$

Somit

$$x_0' x_{i_2}' \dots x_{i_n}' x_{k+1}' = y_0' y_{i_2}' \dots y_{i_n}' y_{k+1}'$$

$$= A a_1 A a_2 A \dots A a_s A Z.$$

„$\Leftarrow$": Sei $(i_1, \dots, i_n)$ eine Lösung für $f(K)$.

Werden zeigen, dass $(1, i_2, \dots, i_{n-1})$ eine Lösung für $K$ ist:

- nur $x_0', y_0'$ beginnen mit dem gleichen Buchstaben $(A)$, nur $x_{k+1}', y_{k+1}'$ enden mit dem gleichen Buchstaben $(Z)$, also $i_1 = 0$, $i_n = k+1$
- $i_2, \dots, i_{n-1} \neq 0$: $x_0'$ ist das einzige $x'$-Wort, das mit $A$ beginnt. Falls $0 \in \{i_2, \dots, i_{n-1}\}$, würde $AA$ vorkommen, was aber bei $y'$ nicht möglich ist.
- $i_2, \dots, i_{n-1} \neq k+1$: $Z$ kommt nur in $x_{k+1}'$ und $y_{k+1}'$ vor. Nach dem ersten Vorkommen vom Index $k+1$ ist Gleichheit erreicht, d.h. wir können oBdA annehmen, dass $i_2, \dots, i_{n-1} \neq k+1$ ist.

Wir erhalten aus $x_{i_1}' \dots x_{i_n}' = y_{i_1}' \dots y_{i_n}'$ durch Streichen aller $A, Z$ die Gleichheit $x_1 x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}} = y_1 y_{i_2} \dots y_{i_{n-1}}$. $\boxtimes$