Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 7.4 —

Aufgabe 7.4 (10 Punkte) Die Komplexitätsklasse coNP ist definiert als

$$\mathrm{coNP} = \{L : \overline{L} \in \mathrm{NP}\},$$

wobei $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ das Komplement der Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist.

1. Zeigen, Sie dass die Inklusion $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ genau dann zu coNP gehört, falls ein Polynom p und eine Polynomialzeit-Turingmaschine M existiert, so dass für jedes $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in L \iff \forall u \in \Sigma^{p(|x|)}\ M(x, u) = 1.$$

Lösung

1. (a) Sei $L \in \mathrm{P}$, dann existiert eine Polynomialzeit-Turingmaschine M, die L entscheidet. Wähle $p \equiv 0$ und $u = \epsilon$ (das leere Wort), dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$, dass $w \in L$ genau dann, wenn M die Eingabe (x, u) akzeptiert. Somit ist $L \in \mathrm{NP}$.

   (b) Sei $L \in \mathrm{P}$ und M eine Polynomialzeit-Turingmaschine, die L entscheidet. Durch das Vertauschen der akzeptierenden und nicht-akzeptierenden Zustände in M, erhält man eine Polynomialzeit-Turingmaschine, die $\overline{L}$ entscheidet. Somit gilt $\overline{L} \in \mathrm{P}$. Da $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, folgt $\overline{L} \in \mathrm{NP}$ und somit gilt $L \in \mathrm{coNP}$.

   Da für $L \in \mathrm{P}$ folgt $L \in \mathrm{NP}$ und $L \in \mathrm{coNP}$, gilt $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$

2.

$$\begin{aligned}
L \in \mathrm{coNP} &\Leftrightarrow \overline{L} \in \mathrm{NP} \\
&\Leftrightarrow \text{Es existiert ein Polynom } p \text{ und eine Polynomialzeit-TM } M, \text{ so dass für alle} \\
&\qquad x \in \Sigma^* \text{ gilt: } x \in \overline{L} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^{p(|x|)} : M(x, u) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{Es existiert ein Polynom } p \text{ und eine Polynomialzeit-TM } M, \text{ so dass für alle} \\
&\qquad x \in \Sigma^* \text{ gilt: } x \in L \Leftrightarrow \forall u \in \Sigma^{p(|x|)} : M(x, u) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{Es existiert ein Polynom } p \text{ und eine Polynomialzeit-TM } M, \text{ so dass für alle} \\
&\qquad x \in \Sigma^* \text{ gilt: } x \in L \Leftrightarrow \forall u \in \Sigma^{p(|x|)} : \overline{M}(x, u) = 1,
\end{aligned}$$

hierbei ist $\overline{M}$ die TM, die sich aus M kontruieren lässt, indem man die akzeptierenden und die nicht-akzeptierenden Zustände vertauscht.