Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
M. Dostert, M.Sc.

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 8.4 —

Aufgabe 8.4 (10 Punkte) Betrachten Sie die folgenden Varianten des MAXCUT Problems für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{N}$:

V1: Gegeben ist $k \in \mathbb{N}$. Gibt es einen Schnitt $C \subseteq E$ mit $\sum_{e \in C} w(e) \geq k$?

V2: Bestimme das größte k, so dass es einen Schnitt C mit $\sum_{e \in C} w(e) = k$ gibt.

V3: Berechne einen Schnitt C, so dass es keinen Schnitt C' gibt mit $\sum_{e \in C'} w(e) > \sum_{e \in C} w(e)$.

Zeigen Sie:

1. Wenn V1 in polynomieller Zeit lösbar ist, dann ist auch V2 in polynomieller Zeit lösbar.
2. Wenn V2 in polynomieller Zeit lösbar ist, dann ist auch V3 in polynomieller Zeit lösbar.

Lösung

1. Sei M_1 eine Turing-Maschine, die Variante V1 in polynomieller Zeit entscheidet. Eine Turing-Maschine für Variante V2 kann dann wie folgt konstruiert werden:

   Setze $k_{\max} := \sum_{e \in E} w(e)$.

   Per binärer Suche über k in $[0, k_{\max}]$ bestimme das größte k, für das M_1 (G, w, k) akzeptiert.

   Korrektheit: Für das resultierende k gilt dann, dass es einen Schnitt $C \subseteq E$ gibt mit $\sum_{e \in C} w(e) \geq k$, aber keinen Schnitt mit größerem Gewicht. Also ist $\sum_{e \in C} w(e) = k$ und dies ist das größtmöglich Gewicht eines Schnittes.

   Laufzeit: $O(\log(k_{\max}) \cdot p(|\langle G, w, k\rangle|))$, wobei p ein Polynom ist, das die Laufzeit von M_1 beschränkt. Da $k_{\max} \leq |E| \cdot w_{\max}$ mit $w_{\max} = \max_{e \in E} w(e)$ und $w_{\max}$ höchstens einfach exponentiell in $|\langle G, w\rangle|$ ist, ist dies polynomiell in $|\langle G, w\rangle|$.

2. Sei M_2 eine Turing-Maschine, die Variante V2 in polynomieller Zeit berechnet. Eine Turing-Maschine für Variante V3 kann dann wie folgt konstruiert werden:

   Setze $k := M_2(G, w)$ und $C := E$.

   Für alle Kanten $e \in E$: Falls $M_2(C \setminus \{e\}, w|_{C \setminus \{e\}}) = k$, setze $C = C \setminus \{e\}$.

   Korrektheit: Das resultierende C enthält einen maximalen Schnitt, da $M_2((V, C), w|_C) = k$. Wäre C selbst kein maximaler Schnitt, könnte eine Kante aus C entfernt werden. Es gilt aber $M_2((V, C \setminus \{e\}), w|_{C \setminus \{e\}}) < k$ für alle $e \in C$.

   Laufzeit: $O(|E| \cdot p(|\langle G, w\rangle|)$, wobei p ein Polynom ist, das die Laufzeit von M_2 beschränkt.