Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Aufgabenblatt 10 —

Aufgabe 9.1 Sei $L \subseteq \Sigma^*$ genau dann in der Klasse ZPP ("zero error, polynomial, probabilistic"), wenn es eine polynomialzeit-beschränkte probabilistische Turingmaschine M gibt, so dass für jedes $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L \Leftrightarrow M(x) = 1.$$

Zeigen Sie: $\mathrm{ZPP} = \mathrm{RP} \cap \mathrm{coRP}$.

Aufgabe 9.2 Zeigen Sie:

1. $\Sigma_i^p \subseteq \Sigma_{i+1}^p$,
2. $\Sigma_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \Sigma_{i+2}^p$.

Aufgabe 9.3 Definiere $\mathrm{DP} = \{L \subseteq \Sigma^* : L = L_1 \cap L_2 \text{ mit } L_1 \in \mathrm{NP}, L_2 \in \mathrm{coNP}\}$ (nicht zu verwechseln mit $\mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$).
Zeigen Sie:

1. $\mathrm{EXACT\text{-}INDSET} \in \Pi_2^p$,
2. $\mathrm{EXACT\text{-}INDSET} \in \mathrm{DP}$,
3. $\mathrm{EXACT\text{-}INDSET}$ ist DP-vollständig.

   Tipp: Zeigen Sie zunächst: $\mathrm{SAT\text{-}\overline{SAT}} = \{\langle \phi, \psi \rangle : \phi \in \mathrm{SAT} \text{ und } \psi \in \overline{\mathrm{SAT}}\}$ ist DP-schwer. Für die Reduktion auf $\mathrm{EXACT\text{-}INDSET}$ lässt sich der Graph aus der Reduktion $\mathrm{SAT} \leq_p \mathrm{CLIQUE}$ so anpassen, dass er $\mathrm{SAT} \leq_p \mathrm{INDSET}$ beweist, und man genaue Kontrolle über die Größe der größten unabhängigen Menge hat.

Aufgabe 9.4 (10 Punkte) Zeigen Sie: Σ_i-SAT ist Σ_i^p-vollständig.
Tipp: Verwenden Sie die nullte Idee aus dem Beweis des Cook-Levin-Theorems.

Abgabe: Bis Mittwoch, 18. Januar 2017 um 12 Uhr im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01). Bitte Namen und Matrikelnummer auf die Abgabe schreiben.