Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 10.4 —

Aufgabe 10.4 (10 Punkte) Zeigen Sie: Σ_i-SAT ist Σ_i^p-vollständig.

Lösung

1. Σ_i-SAT $\in \Sigma_i^p$:
   Sei M eine Turing-Maschine, die bei Eingabe einer Formel und einer Belegung ihrer Variablen überprüft, ob die Belegung die Formel erfüllt. Für eine aussagenlogische Formel φ gilt dann:

   $$\begin{aligned}\langle\varphi\rangle \in \Sigma_i\text{-SAT} &\Leftrightarrow \exists u_1 \forall u_2 \ldots Q_i u_i\ \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_i) = 1\\ &\Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{|\langle\varphi\rangle|} \forall u_2 \in \{0,1\}^{|\langle\varphi\rangle|} \ldots Q_i u_i \in \{0,1\}^{|\langle\varphi\rangle|}\ M \text{ akzeptiert } (\langle\varphi\rangle, u_1, u_2, \ldots, u_i).\end{aligned}$$

   Beachte hierbei, dass die Länge von u_j durch $|\langle\varphi\rangle|$ beschränkt ist.

2. Σ_i-SAT ist Σ_i^p-schwer:
   Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache in Σ_i^p. OBdA sei dabei $\Sigma = \{0,1\}$. Es gibt also eine pzb TM M und ein Polynom p, so dass

   $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots Q_i u_i \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ M \text{ akzeptiert } (x, u_1, u_2, \ldots, u_i).$$

   Aus dem Beweis des Satzes von Cook-Levin aus der Vorlesung wissen wir, dass wir, gegeben x, in polynomieller Zeit eine aussagenlogische Formel φ_x von polynomieller Länge konstruieren können, die die Arbeitsweise von M beschreibt. Dabei gibt es für jeden Eintrag des Inputs eine Variable, sowie weitere Variablen, um das Verhalten von M zu beschreiben. Nach entsprechendem Gruppieren der Variablen von φ_x gilt dann für feste $u_1, \ldots, u_i$:

   $$M \text{ akzeptiert } (x, u_1, \ldots, u_i) \Leftrightarrow \exists z\, \varphi_x(u_1, \ldots, u_i, z) = 1.$$

   Nun unterscheiden wir zwei Fälle. Falls i ungerade ist und damit $Q_i = \exists$, sind wir fertig, da gilt:

   $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots \exists u_i \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists z\, \varphi_x(u_1, \ldots, u_i, z) = 1.$$

   Die letzten zwei Existenzquantoren können zu einem zusammengefasst werden.

   Falls i gerade ist, betrachte das Komplement von L. Sei M' die TM, die wie M läuft, aber ein Input genau dann akzeptiert, wenn M es ablehnt. Dann gilt:

   $$x \notin L \Leftrightarrow \forall u_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists u_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots \exists u_i \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ M' \text{ akzeptiert } (x, u_1, u_2, \ldots, u_i).$$

   Sei ψ_x wie oben eine Formel, die die Arbeitsweise von M' beschreibt. Dann haben wir:

   $$x \notin L \Leftrightarrow \forall u_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists u_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots \exists u_i \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists z\, \psi_x(u_1, \ldots, u_i, z) = 1.$$

   Also gilt mit $\varphi_x = \neg\psi_x$:

   $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots \forall u_i \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall z\, \varphi_x(u_1, \ldots, u_i, z) = 1.$$