Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. A. Gundert

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2016/17

— Lösungsskizze zur Aufgabe 11.4 —

Aufgabe 11.4 (10 Punkte) Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißt eine bijektive Abbildung $\sigma : V \to V$ *Automorphismus*, falls $\{u, v\} \in E$ genau dann, wenn $\{\sigma(u), \sigma(v)\} \in E$. Die Identität ist immer ein trivialer Automorphismus. Zeigen Sie, dass für die Probleme

$$\mathrm{GA} = \{\langle G\rangle : G \text{ Graph, es existiert ein nicht-trivialer Automorphismus von } G\}$$

und

$$\text{1-GI} = \{\langle G, H\rangle : G, H \text{ Graphen, es existiert genau ein Isomorphismus zwischen } G \text{ und } H\}$$

gilt:

$$\mathrm{GA} \in \mathrm{P} \iff \text{1-GI} \in \mathrm{P}.$$

Lösung

$\Longrightarrow$: Sei G ein Graph. Da die Identität immer ein Isomorphismus von G nach G ist, gibt es genau dann weitere solche Isomorphismen, wenn G nicht-triviale Automorphismen hat. Es gilt also:

$$(G, G) \in \text{1-GI} \iff G \notin \mathrm{GA}.$$

Eine Turingmaschine, die bei Eingabe von $\langle G\rangle$ testet, ob $(G, G) \in$ 1-GI, kann also GA mit Hilfe von 1-GI entscheiden. Falls 1-GI $\in$ P, läuft auch diese Maschine in Polynomialzeit.

$\Longleftarrow$: Um 1-GI mit Hilfe von GA zu entscheiden, gehen wir wie folgt vor:

Bei Eingabe von $\langle (G, H)\rangle$ wird getestet, ob G und H zusammenhängend sind. Falls genau einer der beiden Graphen zusammenhängend ist, gebe $(G, H) \notin$ 1-GI aus. Falls beide nicht zusammenhängend sind, gehe zu ihren Komplementen über.

Teste nun, ob $G \in \mathrm{GA}$ oder $H \in \mathrm{GA}$. Falls ja, gebe $(G, H) \notin$ 1-GI aus. Falls nein, teste, ob $G \cup H \in \mathrm{GA}$, wobei $G \cup H$ die disjunkte Vereinigung der beiden Graphen ist. Gebe $(G, H) \in$ 1-GI aus, falls $G \cup H \in \mathrm{GA}$.

Polynomielle Laufzeit (unter Annahme von $\mathrm{GA} \in \mathrm{P}$): Zusammenhang eines Graphen kann, z.B. mit Tiefensuche, in polynomieller Zeit entschieden werden.

Korrektheit: Falls genau einer der beiden Graphen zusammenhängend ist, sind G und H nicht isomorph. Zwei Graphen G und H sind genau dann isomorph, wenn es ihre Komplemente sind (und die Anzahl der Isomorphismen ist dieselbe). Diese sind zusammenhängend, falls G und H es nicht sind.

Gilt $G \in \mathrm{GA}$ und $H \notin \mathrm{GA}$ (oder umgekehrt), sind die Graphen offensichtlich nicht isomorph. Gilt $G \in \mathrm{GA}$ und $H \in \mathrm{GA}$, so sind sie entweder nicht isomorph oder es gibt mehrere Isomorphismen.

Es verbleibt der Fall, dass $G \notin \mathrm{GA}$ und $H \notin \mathrm{GA}$. Wir zeigen folgende Behauptung für **zusammenhängende** Graphen G und H:

$$\text{Falls } G \notin \mathrm{GA} \text{ und } H \notin \mathrm{GA}, \text{ dann } ((G, H) \in \text{1-GI} \iff G \cup H \in \mathrm{GA}).$$

Falls $(G, H) \in$ 1-GI, gibt es einen Isomorphismus ϕ von G nach H. Dann lässt sich aus ϕ ein nicht-trivialer Automorphismus von $G \cup H$ konstruieren.

Falls $G \cup H \in \mathrm{GA}$, gibt es einen nicht-trivialen Automorphismus ψ von $G \cup H$. Die Zusammenhangskomponenten von $G \cup H$ sind G und H. ψ bildet Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten ab, also ist $\psi|_G$ entweder ein Isomorphismus von G nach H oder ein Automorphismus von G. Letzteres kann nicht sein, da ψ nicht-trivial ist und $G \notin \mathrm{GA}$. Es gilt also $G \cong H$. Falls es zwei verschiedene Isomorphismen $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$ von G nach H gäbe, so wäre z.B. $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ ein Automorphismus von H. Es gilt also $(G, H) \in$ 1-GI.